IL METODO DEI TABLEAUX

Le seguenti note di lavoro rappresentano una integrazione al testo di W. Hodges, *Logica* (Garzanti, Milano, 1987), che non contiene una parte formale sufficientemente sviluppata.
Lo stile di presentazione del metodo dei tableaux è sostanzialmente quello di Smullyan (v. oltre), soprattutto per quanto concerne l'impianto della dimostrazione di completezza. Sono però state introdotte varie modifiche per permettere un adeguamento ai testi utilizzati durante il corso.
Il metodo di lavoro suggerito è il seguente. Si può cominciare con il leggere il testo di Hodges per la parte enunciativa, e quindi vederne il corrispettivo formale su queste note di lavoro. Si può poi fare lo stesso per la parte predicativa, vedendo preliminarmente, oltre al libro di Hodges, il secondo capitolo del testo di Rogers[1].

[1] R. Rogers, *Logica matematica e teorie formalizzate*, Feltrinelli, Milano, 1978.

ALBERI
Un albero non ordinato T è composto dai seguenti elementi:
(1) Un insieme S di elementi chiamati punti;
(2) Una funzione, f, che associa a ogni punto x un intero positivo f(x) chiamato il livello di x;
(3) Una relazione xRy definita in S, che leggiamo 'x è un predecessore di y' o 'y è un successore di x'. Questa relazione deve soddisfare i seguenti requisiti:
(C1) C'è un unico punto a_1 di livello 1. Tale punto sarà chiamato origine dell'albero.
(C2) Ogni punto diverso dall'origine ha un unico predecessore.
(C3) Dati due qualsiasi punti x e y, se y è un successore di x, allora f(y) = f(x) + 1.
Un punto è chiamato *finale* se non ha successori, *semplice* se ha esattamente un successore e *ramificante* se ha più di un successore. Per *percorso* si intende una sequenza finita o numerabile di punti, che inizia dall'origine e che è tale che ogni termine della sequenza (eccetto l'ultimo, se esiste) è il predecessore di quello seguente. Infine, per percorso massimale o *ramo* si intende o un percorso infinito o un percorso il cui ultimo termine è un punto finale.
Da (C1)-(C3) segue immediatamente che, per ogni punto x, esiste un unico percorso P_x il cui ultimo termine è x. Se y sta in P_x,diciamo che y *domina* x o che x è dominato da y. Se y domina x e y ≠ x, diciamo che y è *sopra* x, o che x è *sotto* y. Inoltre, x è detto confrontabile con y se x domina y o y domina x. Infine, si dice che y è *fra* x e z se y è sopra x (rispettivamente, z) e sotto z (rispettivamente, x).
Per *albero ordinato* si intende un albero non ordinato insieme con una funzione θ che a ogni punto ramificante z assegna una sequenza θ(z) che non contiene ripetizioni e il cui insieme di termini consiste di tutti i successori di z. Pertanto, se z è un punto ramificante di un albero ordinato, possiamo parlare del 1^0, 2^0,...,n^0,... successore di z (per ogni n minore o eguale al numero dei successori di z), intendendo, ovviamente, il 1^0, 2^0,...,n^0,... termine di θ(z). Nel caso di un punto semplice x parleremo anche del successore di x come dell'unico successore di x. Si avrà anche modo di parlare dell'aggiunta di "nuovi" punti come successori di un punto finale x di un albero T.
Più precisamente:
per ogni elemento y non in T, per aggiunta di y come successore unico di x si intende l'albero ottenuto aggiungendo y all'insieme S, aggiungendo la coppia ordinata <x,y> alla relazione R (vista come un insieme di coppie ordinate), ed estendendo la funzione f con il porre f(y) = f(x) + 1. Se invece $y_1,\dots,y_n$ sono elementi distinti, ciascuno dei quali non è in T, per aggiunta di $y_1,\dots,y_n$ rispettivamente come 1^0, 2^0,...,n^0 successore di x, si intende l'albero ottenuto aggiungendo a S gli y_k (dove $1 \leq k \leq n$), aggiungendo le coppie $<x,y_k>$ a R, estendendo f con il porre $f(y_l) = ... = f(y_n) = f(x) + 1$ ed estendendo la funzione θ con il definire θ(x) come la sequenza $y_1,\dots,y_n$. [E' ovvio che la struttura estesa che si ottiene in questo modo è ancora un albero.]
Un albero è detto *finitamente generato* se ogni punto ha solo un numero finito di successori. Un albero, T, è detto finito se T ha solo un numero finito di punti, altrimenti è detto infinito. Ovviamente, un albero finitamente generato può essere infinito.
Noi avremo a che fare solo con alberi ordinati in cui ogni punto ramificante ha al massimo due successori. Alberi simili sono chiamati *diadici*; in essi il primo successore di un punto ramificante è detto *successore sinistro* e il secondo *successore destro*.

TABLEAUX ENUNCIATIVI

Sia X un insieme finito di formule. Per *tableau per X* si intende un albero diadico ordinato i cui punti sono insiemi di occorrenze di formule e che è costruito nel modo seguente. Iniziamo ponendo X all'origine. Sarà questo un primo tableau per X, con un unico punto. Supponiamo adesso che T sia un tableau per X che è già stato costruito e che Y sia un punto finale. Allora possiamo estendere T con una di queste tre operazioni (dove diciamo che un'occorrenza di una formula *sta* in un percorso - o ramo, in particolare - di un tableau se appartiene a un punto di quel percorso):
(a) Se un'occorrenza di una formula di tipo ¬¬A sta nel ramo P_Y, aggiungiamo l'insieme costituito da un'occorrenza di A come unico successore di Y.

(b) Se un'occorrenza di una formula di tipo $\neg(A \rightarrow B)$ sta nel ramo P_Y, aggiungiamo l'insieme costituito da un'occorrenza di A e da un'occorrenza di $\neg B$ come unico successore di Y.
(c) Se un'occorrenza di una formula di tipo $(A \rightarrow B)$ sta nel ramo P_Y, aggiungiamo simultaneamente l'insieme costituito da un'occorrenza di $\neg A$ come successore sinistro di Y e l'insieme costituito da un'occorrenza di B come successore destro di Y.

La precedente definizione induttiva di tableau per X può essere resa esplicita nel modo seguente. Dati due alberi diadici T_1 e T_2, i cui punti sono insiemi di occorrenze di formule, chiamiamo T_2 *estensione diretta* di T_1 se T_2 può essere ottenuto da T_1 per una applicazione di una operazione in (a)-(c). Allora T è un tableau per X sse esiste una sequenza finita $(T_1, T_2, ..., T_n = T)$ tale che T_1 è un albero a punto unico la cui origine è X e tale che per ogni $k<n$, T_{k+1} è un'estensione diretta di T_k.
Si ricordi che un ramo α di un tableau è chiuso se c'è una formula A tale che occorrenze di A e di $\neg A$ stanno in α. In questo caso si dice che quelle occorrenze di A e $\neg A$ sono *usate* per chiudere il ramo.
Si dice che un tableau T *è chiuso* se ogni suo ramo è chiuso. Per *confutazione* di un insieme finito di formule X si intende un tableau chiuso per X, mentre per *dimostrazione* di una formula A si intende un tableau chiuso per $\{\neg A\}$.
Si supponga infine che in un tableau ci sia un ramo α tale che per l'insieme delle formule che stanno in α ci sia già una confutazione. Allora si dice che α è *assunto come chiuso,* perché sappiamo che, attraverso aggiunte successive, possiamo ottenere rami che sono tutti chiusi. In pratica, un ramo che è chiuso (o che è assunto come chiuso) non ha bisogno di essere esteso ulteriormente, anche se le regole ce lo permetterebbero.

Anche le seguenti definizioni ci saranno utili in seguito.
Un'occorrenza di una formula A si dice *analizzata* in un ramo di un tableau a meno che valga una di queste tre condizioni:
(i) A è $\neg\neg B$ e nessun punto del ramo contiene B;
(ii) A è $\neg(B \rightarrow C)$ e si verifica almeno una di queste due ipotesi: (a) in nessun punto del ramo ci sono occorrenze di B; (b) in nessun punto del ramo ci sono occorrenze di $\neg C$;
(iii) A è $B \rightarrow C$ e ogni punto del ramo non contiene né occorrenze di $\neg B$ né occorrenze di C. Un ramo è chiamato *completo* se contiene solo occorrenze analizzate di formule. Infine, un tableau è chiamato *esaurito* se ogni suo ramo è chiuso o completo.

(Cfr. R. Smullyan, *First–Order Logic,* New York, 1968;
J. Bell, M. Machover, A *Course in Mathematical Logic,* Amsterdam, 1977.)

ESERCIZI

Dimostrate i seguenti lemmi:
1.1 Data una confutazione di Y, si può confutare $Y \cup X$, dove X è un qualsiasi insieme di formule.
1.2 Data una confutazione di $X, \neg\neg A$, si può confutare X,A. (Si ricordi che la scrittura 'X,A' sta per '$X \cup \{A\}$'.)
1.3 Data una confutazione di $X, A \rightarrow B$, si possono confutare $X, \neg A$ e X,B.
1.4 Data una confutazione di $X, \neg(A \rightarrow B)$, si può confutare $X, A, \neg B$.

UN UTILE ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

Nella prima sezione di queste dispense si è presentato un caso classico di definizione induttiva, che qui richiamiamo brevemente.

Def. *L'insieme dei numeri naturali* è il più piccolo insieme N tale che:
(i) $0 \in N$;
(ii) se $x \in N$, allora $S(x) \in N$ (dove S(x) è il successore di x).

(i) è chiamata clausola di *base,* e introduce gli elementi di base (solo uno, in questo caso) dell'insieme definito. (ii) introduce invece un modo di generazione di ulteriori elementi. (Più precisamente, in questo caso si dovrebbe dire: un modo di individuazione, visto che tutti questi elementi - 0 compreso - devono già essere dati in un dominio di partenza, in modo da caratterizzare S.)

Esercizio: Fornite una definizione ricorsiva del tipo di quella precedente per l'insieme F delle formule ben formate del linguaggio enunciativo L.

A questo tipo di definizioni è associato il seguente

Principio di induzione:

(1) 0 ha la proprietà P.
(2) Se n ha la proprietà P, anche S(n) ha la proprietà P.
(3) Quindi, ogni numero naturale ha P.

L'asserzione (3) è dimostrata quando lo sono (1) e (2). (1) è chiamata *base* dell'induzione, (2) è invece il *passo d'induzione*. Siccome (2) è un condizionale, si dimostra il conseguente assumendo l'antecedente: tale assunzione è chiamata ipotesi d'induzione.

Principio di induzione forte:

(1) 0 ha la proprietà P.
(2) Se ogni numero naturale k minore di n ha P, allora n ha P.
(3) Quindi, ogni numero naturale ha P.

Def. di *grado* di una formula di L:

(1) Una lettera enunciativa è di grado 0.
(2) Se A è di grado n, allora $\neg$A è di grado n+1.
(3) Se A e B sono rispettivamente di grado n e n', allora A$\rightarrow$B è di grado n+n'+1.

Ed ecco un utile esempio di dimostrazione per induzione sul grado delle formule (cfr. Bell,Machover, cit., pp. 31-32):

1.4. *Teorema di eliminazione*. Data una confutazione di X,A e una di X,$\neg$A, c'è una confutazione di X.

Dimostrazione per induzione sul grado di A:

A è di grado zero, è cioè una lettera enunciativa. Costruiamo allora un tableau T per X che imita la confutazione di X,A. Ogni ramo α di questo tableau è chiuso indipendentemente da A: infatti, essendo una lettera enunciativa, A sarebbe usata per chiudere α solo se $\neg$A appartenesse a qualche punto di α. Ma, dato che abbiamo comunque una confutazione di X,$\neg$A, sappiamo che un ramo che contenga $\neg$A e le formule in X è chiuso. Ma questo è il caso di α, che è allora *assunto come chiuso* indipendentemente dall'aggiunta di A. Quindi, tutti i rami di T essendo chiusi, T è una confutazione di X.

A è $\neg$B. Questo significa che abbiamo confutazioni di X,$\neg$B, e X,$\neg\neg$B. Per il lemma 1.2 abbiamo dunque una confutazione di X,B e quindi, per ipotesi di induzione, abbiamo anche una confutazione per X, dato che il grado di B è minore di quello di $\neg$B.

Infine, se A è B$\rightarrow$C, allora abbiamo ottenuto confutazioni di X,B$\rightarrow$C e X,$\neg$(B$\rightarrow$C). Da queste, usando i lemmi 1.3 e 1.4, costruiamo:
(a) una confutazione di X,$\neg$B;
(b) una confutazione di X,C;
(c) una confutazione di X,B,$\neg$C.
Per il lemma 1.1, da (b) possiamo ottenere:
(d) una confutazione di X,B,C.
Per ipotesi di induzione (poiché il grado di C è minore del grado di B$\rightarrow$C), da (c) e (d) otteniamo:
(e) una confutazione di X,B.
Usando ancora l'ipotesi di induzione da (a) e (e) otteniamo una confutazione di X.

D'ora in poi useremo la seguente notazione:

'X $\vdash$' sta per 'X è confutabile', (o anche: 'C'è una confutazione di X', 'X è sintatticamente inconsistente').

'X $\vdash$A'sta per 'X$\cup${$\neg$A) è confutabile', 'A è derivabile da X'.

' $\vdash$A' sta per '{$\neg$A} è confutabile', 'A è dimostrabile'.

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI ELIMINAZIONE

Il teorema 1.4 ci permette di dimostrare il corrispondente sintattico del teorema del taglio, e cioè:

1.5 Se X $\vdash$A e X,A $\vdash$B, allora X $\vdash$B.

Infatti, se vale quanto asserito nell'antecedente di 1.5, valgono anche:
(a) X,$\neg$A $\vdash$
(b) X,A,$\neg$B $\vdash$.
Ma da (a) (per il lemma 1.1) scende:
(c) X,$\neg$A,$\neg$B $\vdash$
A loro volta, per il teorema di eliminazione, (b) e (c) implicano:
(d) X,$\neg$B $\vdash$, cioè X $\vdash$B.

Il teorema 1.4 e il suo corollario 1.5 ci mettono in grado di adottare delle "scorciatoie" nella costruzione dei tableaux. Essi giustificano infatti l'adozione delle seguenti regole aggiuntive. Sia T un qualsiasi tableau e R_x un suo ramo (con x come punto finale). Abbiamo allora:

Regola della tautologia. T può essere espanso con l'aggiunta di {A} come successore unico di x, dove A è una qualsiasi tautologia.

Regola dell'implicazione. Se Y è un insieme di formule che stanno tutte in R_x e se Y $\vdash$A, allora T può essere espanso con l'aggiunta del punto {A} come successore unico di x.

Regola del modus ponens. Se A$\rightarrow$B e A stanno in R_x, allora T può essere espanso con l'aggiunta del punto {B} come successore unico di x.

(Cfr. D. Scott, *Notes on Formalization of Logic,* S.A. Monograph no. 2, Sub-faculty of Philosophy, Oxford, 1981.)

TABLEAUX PREDICATIVI

Il linguaggio del prim'ordine L1 cui faremo riferimento è sostanzialmente quello descritto nella prima sezione di queste dispense, con alcune differenze. Anzitutto, non contiene né i simboli funzionali né il simbolo dell'identità. In secondo luogo, continueremo a considerare negazione e condizionale come connettivi logici primitivi. Infine, il quantificatore primitivo sarà quello universale - designato dalla sequenza di simboli: ($\forall$x) (dove x è una qualsiasi variabile individuale); mentre il quantificatore esistenziale risulta definito come di consueto, cioè come: $\neg$($\forall$x)$\neg$.
La definizione di *grado* di una formula di L1 è come quella data prima per il linguaggio enunciativo, con l'aggiunta della clausola:

(4) Se A è di grado n, allora ($\forall$x)A è di grado n+1.

Sia x una variabile, t un termine e A una formula di L1. Diciamo che t è *libero per (la sostituzione di)* x in A se nessuna occorrenza libera di x in A è all'interno di una sottoformula di A che ha la forma ($\forall$y)B, dove y occorre in t. (Si ricordi che, banalmente, una qualsiasi formula è sottoformula di se stessa.)
Se y è una variabile che non occorre libera in A e che è libera per x in A, diciamo che la formula ($\forall$y)A' è una *variante alfabetica* della formula ($\forall$x)A, dove A' è la formula che si ottiene da A sostituendo con occorrenze di y tutte le occorrenze libere di x.
Con A(t/x) intenderemo infine la formula che si ottiene da A sostituendo con occorrenze del termine t tutte le occorrenze libere di x se t è libero per x in A, oppure, se t non è libero per x in A, la formula che si ottiene operando quella sostituzione in una variante alfabetica A' di A tale che t è libera per x in A'. (Si noti che, per rendere univoca questa definizione di A(t/x), occorre avere una regola che ci dica come selezionare A'.)

La definizione formale di tableau predicativo può essere ottenuta aggiungendo alle regole di espansione (a)-(c) stipulate per il caso enunciativo le seguenti due regole:

(e) Se un'occorrenza di una formula di tipo $(\forall x)A$ sta nel ramo P_Y, aggiungiamo l'insieme costituito da un'occorrenza di $A(t/x)$, dove t è un qualsiasi termine.
(f) Se un'occorrenza di una formula di tipo $\neg(\forall x)A$ sta nel ramo P_Y, aggiungiamo l'insieme costituito da un'occorrenza di $\neg A(y/x)$, dove y è una qualsiasi variabile che *non occorre libera* in nessuna delle formule che stanno in P_Y.

Schematicamente:

Regola per $(\forall x)$:	Regola per $\neg(\forall x)$:
.	.
.	.
.	.
$(\forall x)A$	$\neg(\forall x)A$
.	.
.	.
.	.
|	|
$A(t/x)$	$\neg A(y/x)$ (con restr. su y)

Nella pratica useremo anche queste due regole derivate, che qui diamo solo schematicamente:

Regola per $(\exists x)$:	Regola per $\neg(\exists x)$:
.	.
.	.
.	.
$(\exists x)A$	$\neg(\exists x)A$
.	.
.	.
.	.
|	|
$A(y/x)$ (con restr. su y)	$\neg A(t/x)$

Anche la definizione di occorrenza analizzata di formula data prima andrebbe riformulata alla luce di queste nuove regole. Qui ci limiteremo a osservare che un'occorrenza di $\neg(\forall x)A$ può essere considerata analizzata in un ramo se *qualche* occorrenza di $\neg A(t/x)$ sta su quel ramo, dove t è un qualsiasi termine. (Cercate di giustificare intuitivamente ciò.). D'altra parte, un'occorrenza di $(\forall x)A$ può considerarsi analizzata in un ramo se, per ogni termine t, in quel ramo ci sono occorrenze di $A(t/x)$. Ciò significa che, in un ramo finito, occorrenze di formule di tipo $(\forall x)A$ non possono risultare analizzate.

Si noti che le regole d'estensione dei tableaux presentate qui divergono da quelle introdotte da Hodges per più di un motivo. Ci limiteremo a evidenziarne due.

(a) In primo luogo, nel nostro caso è possibile lavorare con formule aperte. Per esempio, è possibile costruire un tableau (che chiude, ovviamente) per una formula di tipo $(\forall x)Px\rightarrow Py$, mentre nel caso di Hodges lo si può fare solo con la sua chiusura universale: $(\forall y)((\forall x)Px\rightarrow Py)$.

(b) In secondo luogo, abbiamo scartato la possibilità che una struttura abbia un dominio vuoto (contrariamente a Hodges, cfr. pp. 245-sgg., 367-368).

Pur continuando a differenziarci sul punto (b) (mantenendo cioè l'assunto che i domini delle strutture contengano almeno un individuo) presenteremo adesso un sistema omologo a quello di Hodges. (Si ricordi che il nostro linguaggio L1 contiene come termini solo variabili e costanti individuali.)

Al posto delle regole (e) e (f) di prima avremo:

(e') Se un'occorrenza di una formula di tipo $(\forall x)A$ sta nel ramo P_Y, aggiungiamo l'insieme costituito da un'occorrenza di $A(a/x)$, dove a è una qualsiasi costante.

(f') Se un'occorrenza di una formula di tipo $\neg(\forall x)A$ sta nel ramo P_Y, aggiungiamo l'insieme costituito da un'occorrenza di $\neg A(a/x)$, dove a è una costante che *non* compare in nessuna delle formule che stanno in P_Y.

Schematicamente:

Regola per $(\forall x)$:	Regola per $\neg(\forall x)$:
.	.
.	.
.	.
$(\forall x)A$	$\neg(\forall x)A$
.	.
.	.
.	.
|	|
$A(a/x)$	$\neg A(a/x)$ (con restr. su a)

E per le regole derivate:

Regola per $(\exists x)$:	Regola per $\neg(\exists x)$:
.	.
.	.
.	.
$(\exists x)A$	$\neg(\exists x)A$
.	.
.	.
.	.
|	|
$A(a/x)$ (con restr. su a)	$\neg A(a/x)$

D'ora in poi, i simboli '$\models$' e '$\vdash$' denoteranno, rispettivamente, le ovvie proprietà e relazioni semantiche concernenti strutture del prim'ordine e le ovvie proprietà e relazioni sintattiche concernenti tableaux predicativi. Più precisamente, in conformità con il testo di Hodges, si farà riferimento al secondo tipo di sistema presentato qui. Per esempio, la scrittura '$X \models A$' esprime il fatto che la formula (chiusa) A di L1 è conseguenza semantica dell'insieme di formule (chiuse) X, cioè che in tutte le strutture del prim'ordine in cui le formule di X sono tutte vere è vera anche A. Analogamente, '$X \vdash A$' esprime il fatto che c'è un tableau predicativo per $X \cup \{\neg A\}$ che chiude, ecc.

CORRETTEZZA

D'ora in poi la scrittura '$M,s \models A$' starà a significare che, data una struttura del prim'ordine $M=\langle D,g \rangle$, la successione s di individui in D soddisfa la formula A in M. Data una successione s, diremo che s' è una *variante di s rispetto a* x_n se s' coincide ovunque con s tranne, *eventualmente,* che all'n-esimo posto. (Intuitivamente, questo significa che s e s' associano alle variabili del linguaggio gli stessi individui, con

l'unica, eventuale, eccezione di x_n. Si noti che, per ogni variabile x_n, s è banalmente una variante di se stessa rispetto a x_n.)
Richiamiamo adesso brevemente le definizioni che ci interessano. Diremo che una formula (chiusa) A *è vera* in una struttura del prim'ordine M=<D,g> (in simboli: $M \models A$) se, per qualsiasi successione s di individui di D, vale $M,s \models A$. Diremo inoltre che un insieme di formule chiuse X *è soddisfacibile* se c'è qualche struttura in cui risultano vere tutte le formule di X, e che una formula A è *conseguenza semantica* di X (in simboli: $X \models A$) se $X \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile (o, equivalentemente, se in tutte le strutture del prim'ordine in cui le formule di X sono congiuntamente vere è vera anche A). Infine, una formula A è detta *valida* quando è conseguenza semantica dell'insieme vuoto ($\models A$) - o, equivalentemente, quando è vera in tutte le strutture.
D'ora in poi, quando tratteremo di nozioni sintattiche come quelle di consistenza e derivabilità assumeremo (salvo indicazioni in contrario) di occuparci solo di insiemi finiti di formule chiuse. Infatti, avremo a che fare con le proprietà del secondo metodo di derivazione definito sopra, in base al quale (in accordo con il testo di Hodges) vengono costruiti tableaux solo per insiemi di quel tipo.

La nozione intuitiva di correttezza che abbiamo in mente è la seguente. Come abbiamo visto, il metodo dei tableaux utilizzato qui ci permette di derivare una formula da un insieme di formule (eventualmente vuoto). Abbiamo definito formalmente (sul piano della sintassi) in che cosa consistano derivazioni simili: i tableaux sono infatti alberi costruiti secondo certe regole ben specificate. Vogliamo adesso vedere quali riscontri sul piano semantico abbia una simile procedura. Altrimenti detto, avendo dapprima considerato i tableaux come pure strutture formali, intendiamo ora chiederci se essi sono adeguati a cogliere la nozione di conseguenza semantica definita rispetto alle strutture del prim'ordine. E c'è un primo senso in cui i tableaux sono adeguati rispetto a tale scopo: è infatti possibile mostrare che la relazione di derivabilità (in termini di tableaux) vale solo per le coppie <Y,A> tali che A è effettivamente conseguenza semantica di Y. Pertanto, diremo che il metodo dei tableaux è corretto (cioè adeguato in questo primo senso) perché mostreremo che, se c'è un tableau predicativo per $Y \cup \{\neg A\}$ che chiude (o, come abbiamo anche detto, se A è derivabile da Y), allora A è conseguenza semantica di Y.
Per provare la correttezza del metodo dei tableaux si tratta dunque di dimostrare che, per un qualsiasi insieme Y di formule e per una qualsiasi formula A, vale quanto segue:

2.1 Se $Y \vdash A$, allora $Y \models A$.

In realtà, in base alle definizioni date, 2.1 può essere letto in questo modo: se c'è un tableau per $Y \cup \{\neg A\}$ che chiude, allora $Y \cup \{\neg A\}$ non è soddisfacibile; o anche, per contrapposizione: se $Y \cup \{\neg A\}$ è soddisfacibile, allora nessun tableau per $Y \cup \{\neg A\}$ chiude (cioè $Y \cup \{\neg A\}$ è sintatticamente consistente). Queste considerazioni ci permettono di affermare che 2.1 sarà dimostrato se in genere, per qualsiasi insieme di formule X, dimostreremo:

2.2 Se X è soddisfacibile, allora X è consistente.

Procediamo dunque alla dimostrazione dell'asserto 2.2.
D'ora in poi, diremo che un ramo di un tableau è soddisfacibile se lo è l'insieme delle formule che stanno in quel ramo. (Scriveremo '$A \in \alpha$' per dire che la formula A sta nel ramo α, e per comodità - anche se impropriamente - identificheremo i rami dei tableaux con le formule che contengono.)
Cominciamo con l'osservare che, se è chiuso, un ramo di un tableau *non* può essere soddisfacibile, perché nessuna struttura del prim'ordine può rendere congiuntamente vere le formule A e $\neg A$ che permettono al ramo in questione di risultare chiuso. Cosí, un tableau che contiene un ramo soddisfacibile non può a sua volta essere chiuso.
Torniamo adesso all'asserto 2.2. Per come abbiamo presentato le cose a suo tempo, costruire un tableau per X significa procedere per estensioni progressive del tableau iniziale il cui unico ramo (che contiene solo X) non chiude: infatti, per assunzione, X è soddisfacibile. Cosí, se dimostrassimo che, ogniqualvolta operiamo un'estensione del tableau in base alle regole date, otteniamo un tableau con almeno un ramo soddisfacibile, avremmo anche dimostrato 2.2, perché qualsiasi tableau costruiamo per un insieme soddisfacibile X, questo tableau deve comunque contenere un ramo non chiuso. In altri termini, nessun tableau per X risulterebbe chiuso, e quindi X sarebbe sintatticamente consistente. Si tratta allora di dimostrare che, per un qualsiasi tableau T, vale quanto segue:

2.3 Sia α un ramo soddisfacibile di T. Se α' è ottenuto da α per applicazione di una delle regole (a), (b), (e'),(f'), allora α' è soddisfacibile. Se α' e α'' sono ottenuti da α per applicazione di (c), allora o α' o α'' è soddisfacibile.

Esaminiamo dunque i diversi casi.

(1) α' è stato ottenuto per applicazione di (a). Questo significa che, per qualche formula A, $\neg\neg A \in \alpha$. D'altra parte, per assunzione, α è soddisfacibile, e quindi lo è anche $\alpha \cup \{A\}$ (cioè α'), perché in ogni struttura in cui è vera $\neg\neg A$ è vera anche A.

(2) α' è stato ottenuto per applicazione di (b). Pertanto, per qualche formula A e B, $\neg(A \to B) \in \alpha$. Come prima, $\alpha \cup \{A, \neg B\}$ (cioè α') deve risultare soddisfacibile, poiché lo è α, e in qualsiasi struttura in cui è vera $\neg(A \to B)$ sono vere anche A e $\neg B$.

(3) α' è stato ottenuto per applicazione di (e'). Abbiamo dunque: $(\forall x_n)A \in \alpha$ per qualche formula A e qualche variabile x_n, e $\alpha' = \alpha \cup \{A(a/x_n)\}$ per qualche costante individuale a. D'altra parte, siccome α è soddisfacibile, ci deve essere qualche struttura del prim'ordine $M=\langle D,g \rangle$ in cui sono vere tutte le formule di α: in particolare, $M \models (\forall x_n)A$; così, presa una qualsiasi assegnazione s di individui in D, vale $M,s \models (\forall x_n)A$, e quindi $M,s' \models A$ per ogni s' che sia una variante di s rispetto a x_n. Ciò significa che, quale che sia l'individuo di D che si associa a x_n, questo individuo è tale da rendere vera la formula '$A(t/x_n)$', dove t è una qualsiasi costante che lo designa. In particolare, ciò varrà dell'individuo g(a), cioè dell'individuo che in M è denotato dalla costante a. Quindi $M,s \models A(a/x_n)$, e, poiché s è una qualsiasi successione di individui di D, ne consegue $M \models A(a/x_n)$. Ciò significa che M soddisfa $\alpha \cup \{A(a/x_n)\}$, cioè α'.

(4) α' è stato ottenuto per applicazione di (f'). Devono dunque esserci qualche formula A e qualche variabile x_n tale che $(\exists x_n)A \in \alpha$, e qualche costante a non occorrente in α tale che $\alpha' = \alpha \cup \{A(a/x_n)\}$. Poiché, per assunzione, α è soddisfacibile, deve esistere almeno una struttura del prim'ordine $M=\langle D,g \rangle$ in cui risultano vere tutte le formule di α: quindi in particolare $M \models (\exists x_n)A$. Ciò significa che, presa una qualsiasi successione s, vale $M,s \models (\exists x_n)A$, e che c'è almeno una successione s' che è una variante di s rispetto a x_n e per la quale vale $M,s' \models A$. Sia dunque u l'individuo che occupa l'n-esimo posto nella successione s'. (Intuitivamente, u è l'individuo che s' associa a x_n e che soddisfa la proprietà denotata dalla formula A.) Si prenda adesso la struttura $M'=\langle D,g' \rangle$ che è esattamente come M tranne, eventualmente, per il modo in cui interpreta a, visto che g'(a)=u. E' chiaro che $M' \models A(a/x_n)$. Inoltre, poiché la costante a non occorreva nel ramo α, tutte le formule di α continuano a essere vere in M'. Quindi $\alpha \cup \{A(a/x_n)\}$, cioè α', è soddisfacibile.

(5) Ad α è stata applicata la regola (c). Abbiamo dunque: $(A \to B) \in \alpha$ per qualche formula A e B, $\alpha' = \alpha \cup \{\neg A\}$ e $\alpha'' = \alpha \cup \{B\}$. Dato che, per assunzione, c'è almeno una struttura del prim'ordine $M=\langle D,g \rangle$ che rende vere tutte le formule di α, allora $M \models A \to B$. Quindi o $M \models \neg A$ o $M \models B$. Nel primo caso è garantito che α' è soddisfacibile, nel secondo che lo è α''.

COMPLETEZZA (I)

Abbiamo dunque visto un primo senso in cui il metodo dei tableaux è adeguato: la relazione di derivabilità definita in termini di tableaux vale solo per le coppie <Y,A> tali che A è conseguenza semantica di Y.
Vogliamo adesso prendere in considerazione un secondo senso di adeguatezza, simmetrico al primo: vogliamo cioè chiederci se quella relazione di derivabilità vale per tutte le coppie <Y,A> tale che A è conseguenza semantica di Y. Se riuscissimo a dimostrare che cosí stanno le cose, avremmo allora perseguito il nostro scopo, facendo vedere che l'auspicata corrispondenza fra la nozione semantica di conseguenza e quella sintattica di derivabilità esiste davvero. Avremmo infatti:

2.4 $Y \models A$ se e solo se $Y \vdash A$.

Come si è detto, per ottenere ciò ci rimane dunque da dimostrare che, per tutte le coppie <Y,A> tali che A è conseguenza semantica di Y, vale che A è derivabile da Y. Ci rimane insomma da dimostrare la conversa di 2.1, e cioè:

2.5 Se $Y \models A$, allora $Y \vdash A$.

Per la dimostrazione dell'asserto 2.5 ricorreremo ad alcune nozioni ausiliarie che verranno ora introdotte.

STRUTTURE PARZIALI

Sia X un insieme qualsiasi di formule del linguaggio del prim'ordine L1. Per *struttura parziale* per X intenderemo la coppia M=<D,g>, dove D è un insieme non vuoto di individui e g è una funzione interpretazione definita per tutte e solo le costanti individuali e le lettere predicative che occorrono nelle formule di X. (Si noti che, in genere, strutture di questo tipo possono non essere strutture del prim'ordine per L1, perché non interpretano tutte le costanti individuali e le lettere predicative di L1, ma, come si è appena detto, solo quelle presenti in un dato insieme di formule X.) Pertanto, data una qualsiasi formula A di X, una struttura parziale M=<D,g> per X e una sequenza di individui di D, è possibile definire le nozioni di soddisfacimento di A da parte di s in M e di verità di A in M esattamente come abbiamo fatto prima per strutture qualsiasi del prim'ordine. (Intuitivamente, una struttura parziale per X è un modello che contiene solo l'informazione necessaria per valutare le formule in X.)
Dati un'insieme di formule X e una struttura parziale per X M=<D,g>, chiamiamo *completamento* di M una qualsiasi struttura del prim'ordine M'=<D,g'>, dove g' è un'estensione di g (assegna cioè gli stessi valori di g agli argomenti che sono nel dominio di g). Qualora X, M e M' abbiano le caratteristiche appena descritte, è facile vedere che vale quanto segue:

(*) (i) Se t è un termine individuale che occorre in X; (ii) se s è una successione di individui di D; (iii) se M(t)/s e M'(t)/s sono, rispettivamente, gli individui che le due strutture fissano come interpretazione del termine t rispetto alla successione s; (iv) allora M(t)/s = M'(t)/s.

Un'importante relazione fra le strutture parziali e i loro completamenti è espressa dal seguente teorema:

2.6 Se X è un insieme di formule e M=<D,g> è una struttura parziale per X in cui sono vere tutte le formule di X, allora tali formule rimangono vere in ogni completamento di M.

Dimostreremo in realtà qualcosa di più forte, e cioè:

2.7 Sia A una formula di un insieme X, M=<D,g> una struttura parziale per X, s una qualsiasi successione di individui di D. Allora, per ogni struttura del prim'ordine M'=<D,g'> che sia un completamento di M, vale che: $M,s \models A$ sse $M',s \models A$.

La dimostrazione è per induzione sul grado di complessità delle formule. Prendiamo in considerazione i vari casi.

(1) A è $P(t_1,...,t_n)$. Pertanto:
$M,s \models P(t_1,...,t_n)$ sse $\langle M(t_1)/s,...,M(t_n)/s\rangle \in g(P)$ (per cond. di verità)
sse $\langle M'(t_1)/s,\ldots,M'(t_n)/s\rangle \in g'(P)$ (per (*))
sse $M',s\ \ P(t_1,\ldots,t_n)$ (per cond. di verità).

(2) A è $\neg B$. Pertanto:
$M,s \models \neg B$ sse non $M,s \models B$ (per cond. di verità)
sse non $M',s \models B$ (per ip. di ind.)
sse $M',s \models \neg B$ (per cond. di verità).

(3) A è $B \rightarrow C$. Pertanto:
$M,s \models B \rightarrow C$ sse non $M,s \models B$ o $M,s \models C$ (per cond. di verità)
sse non $M',s \models B$ o $M',s \models C$ (per ip. di ind.)
sse $M',s \models B \rightarrow C$ (per cond. di verità).

(4) A è $(\forall x_n)B$. Pertanto:
$M,s\ \ (\forall x_n)B$ sse $M,s' \models B$ per ogni s' che sia una variante di s rispetto a x_n (per cond. di verità)
sse $M',s' \models B$ per ogni s' che sia una variante di s rispetto a x_n (per ip. ind.)
sse $M',s \models (\forall x_n)B$ (per cond. di verità).

INSIEMI ANALIZZATI (HINTIKKA SETS)

Cominciamo con la definizione tradizionale di insieme analizzato (o Hintikka set). Sia dunque X un qualsiasi insieme di formule chiuse di L1. Diremo allora che X è un insieme analizzato se vale quanto segue:

(1) Se A è una formula atomica e $A \in X$, allora $\neg A \notin X$
(2) Se $\neg\neg A \in X$, allora $A \in X$
(3) Se $A \rightarrow B \in X$, allora o $\neg A \in X$ o $B \in X$
(4) Se $\neg(A \rightarrow B) \in X$, allora $A \in X$ e $\neg B \in X$
(5) Se $(\forall x_n)A \in X$, allora $A(a/x_n) \in X$ per ogni costante individuale di L1
(6) Se $\neg(\forall x_n)A \in X$, allora $\neg A(a/x_n) \in X$ per qualche costante individuale di L1.

Come al solito, la definizione appena data riguarda solo i simboli primitivi di L1. Se volessimo ampliarla in modo da prendere in considerazione anche i simboli non primitivi, l'ovvia estensione prevederebbe clausole come:

Se $A \vee B \in X$, allora o $A \in X$ o $B \in X$
Se $A \wedge B \in X$, allora $A \in X$ e $B \in X$
Se $(\exists x_n)A \in X$, allora $A(a/x_n) \in X$ per qualche costante individuale di L1 ecc.

Si consideri adesso la clausola (5). E' facile vedere che essa comporta qualcosa di troppo dispendioso. Ogni volta che è presente una formula di tipo $(\forall x)A$, occorre introdurre tutte le esemplificazioni di A per le ìnfinite costanti del linguaggio. Ma è chiaro che, in una quantità di casi, non occorre tanto. Intuitivamente, un insieme analizzato descrive un certo limitato stato di cose, in cui (grazie alla scomposizione verso il basso delle formule complesse) certe proprietà e relazioni valgono di un certo insieme di individui. Nella maggior parte dei casi non c'è bisogno di tutte le costanti di L1 (che sono infinite) per parlare della totalità di questi individui. Un certo stato di cose lo immaginiamo dunque come associato a un certo dominio di individui cosicché, in questa situazione, asserire $(\forall x)A$ significa ovviamente asserire che di ognuno di *quegli* individui è vero A. Del resto, queste considerazioni si attagliano bene alla nozione di struttura parziale introdotta prima, dove può accadere che molte costanti siano lasciate in disparte.
Possiamo allora ragionare in questo modo. Vista in riferimento a un insieme analizzato X, una formula di tipo $(\forall x)A$ asserisce qualcosa di tutti gli individui che popolano lo stato di cose descritto da X. Ma quali sono questi individui? Ora, una risposta naturale sembra questa: sono gli individui cui, in X, vengono attribuite proprietà e relazioni; o anche, più precisamente: *sono gli individui i cui nomi figurano nelle formule di X.* E, sotto questo punto di vista, viene naturale suggerire la seguente modificazione della clausola (5):

(5') Se $(\forall x)A \in X$, allora $A(a/x) \in X$ per ogni costante individuale a di L1 che occorre in qualche formula di X.

Questa clausola sembra più aderente alla concezione sopra esposta, ma pone un interessante problema. Secondo la nuova definizione, l'insieme contenente soltanto la formula $(\forall x)Px$ è un insieme analizzato (poiché, banalmente, non contiene formule con costanti da introdurre nelle esemplificazioni di Px). Ora, come risulterà chiaro dalla dimostrazione del prossimo teorema, la struttura parziale canonica che assoceremmo all'insieme $\{(\forall x)Px\}$ è la struttura il cui dominio di individui è vuoto. (Non ci sono infatti costanti individuali, e sono queste a costituire il dominio dell'interpretazione canonica.) E la cosa funzionerebbe perfettamente, perché l'unica formula contenuta in quell'insieme, essendo una formula universale, risulta (trivialmente) vera nella struttura con dominio vuoto: com'è effettivamente richiesto nel caso di un'interpretazione canonica. Sarebbe allora questa un'ulteriore considerazione - oltre a quelle menzionate da Hodges - per non escludere come improprio il caso del dominio vuoto. Noi però non abbiamo preso questa strada, e consideriamo solo strutture con domini non vuoti. Per attenerci a questa decisione dobbiamo dunque modificare (5'). La soluzione prescelta è la seguente:

(5'') Se $(\forall x)A \in X$, allora: (i) $A(a/x) \in X$ per ogni costante individuale a di L1 che occorre in qualche formula di X; (ii) $A(a/x) \in X$ per almeno una costante individuale a di L1.

In questo modo, grazie alla seconda clausola di (5"), avremo sempre la garanzia che in un insieme analizzato un'asserzione universale comporta il riferimento a qualche oggetto, escludendo il dominio vuoto. Quella clausola aggiuntiva, infatti, comporta l'intervento di almeno una costante da interpretare. (Ma, per ribadire quanto affermato prima a proposito delle osservazioni di Hodges sull'esclusione del dominio vuoto, si noti come (5") risulti più ad hoc di (5').)
Dopo queste divagazioni filosofiche su ciò che, in un certo senso, deve esistere nei nostri domini, veniamo alla dimostrazione del teorema fondamentale di questa sezione sugli insiemi analizzati, teorema che asserisce che ognuno di questi insiemi è soddisfacibile (nella semantica delle strutture parziali).

2.8 Se X è un insieme analizzato, allora c'è qualche struttura parziale per X in cui tutte le formule di X sono vere.

Che ci sia almeno una di queste strutture è provato da quanto segue.
Sia X il nostro insieme analizzato e sia $M=\langle D,g\rangle$ la struttura parziale per X che chiameremo struttura *canonica* per X e che definiamo in questo modo. D è l'insieme delle costanti individuali di L1 che occorrono nelle formule di X, e g è la funzione interpretazione cosí caratterizzata: per ogni costante individuale a (che occorre in X) $g(a)=a$, per ogni lettera predicativa a n posti P (che occorre in X), $g(P)$ è l'insieme delle n-ple di costanti individuali $\langle a_l,\dots a_n\rangle$ tali che $P(a_l,\dots a_n)\in X$.
Si può ora provare:

(a) se $A\in X$, allora $M\models A$;
(b) se $\neg A\in X$, allora non $M\models A$.

La dimostrazione è sul grado di complessità di A.

(1) A è atomica, cioè di tipo $P(a_l,\dots,a_n)$.
(a) Supponi che $P(a_l,\dots,a_n)\in X$. Allora, per come è definita la funzione g, $g(a_l)=a_l,\dots,g(a_n)=a_n$, e inoltre $\langle a_l,\dots,a_n\rangle\in g(P)$. Cosí abbiamo che $\langle g(a_l),\dots,g(a_n)\rangle\in g(P)$, cioè $M\models P(a_l,\dots,a_n)$.
(b) Supponi che $\neg P(a_l,\dots,a_n)\in X$. Quindi $P(a_l,\dots,a_n)\notin X$, cosicché, sempre per come è definita la funzione g, $\langle g(a_l),\dots,g(a_n)\rangle\in g(P)$: ossia non $M\models P(a_l,\dots,a_n)$.

(2) A è di tipo $\neg B$.
(a) Supponi che $\neg B\in X$. Allora, per ipotesi di induzione (poiché il grado di complessità di B è minore di quello di $\neg B$) possiamo assumere che per B valga l'asserto che stiamo dimostrando, e in particolare il punto (b): possiamo cioè assumere falso $M\models B$, il che implica $M\models\neg B$.
(b) Supponi che $\neg\neg B\in X$. Allora $B\in X$ (perché X è un insieme analizzato). Quindi, per ip. di ind., $M\models B$, e quindi non $M\models\neg B$.

(3) A è di tipo $B\rightarrow C$.
(a) Supponi che $B\rightarrow C\in X$. Allora, poiché X è un insieme analizzato, o $\neg B\in X$ o $C\in X$. Quindi, per ip. di ind., o $M\models\neg B$ o $M\models C$, e quindi $M\models B\rightarrow C$.
(b) Supponi che $\neg(B\rightarrow C)\in X$. Allora $B\in X$ e $\neg C\in X$ e, per ip.di ind., $M\models B$ e non $M\models C$: quindi non $M\models B\rightarrow C$.

(4) A è di tipo $(\forall x_n)B$.
(a) Supponi che $(\forall x_n)B\in X$. Allora (poiché X è un insieme analizzato e poiché gli individui del dominio D sono le costanti stesse occorrenti in X), per ogni $a\in D$, $B(a/x_n)\in X$ e quindi, per ip. di ind., $M\models B(a/x_n)$. Ma questo significa che per ogni sequenza s di individui del dominio D, vale $M,s\models(\forall x_n)B$ (perché $M,s'\models B$ per ogni s' che sia una variante di s rispetto a x_n). Pertanto $M\models(\forall x_n)B$.
(b) Supponi che $\neg(\forall x_n)B\in X$. Allora, poiché X è un insieme analizzato, $\neg B(a/x_n)\in X$ per qualche costante a e quindi, per ip. di ind., $M\models\neg B(a/x_n)$. Cosí, per ogni sequenza s di individui di D (cioè di costanti!), c'è sempre una sequenza s' che è una variante di s rispetto a x_n e che assegna a x_n l'individuo (cioè la costante) a: quindi $M,s'\models\neg B$, ciò che comporta la falsità di $M,s\models(\forall x_n)B$ per ognuna di quelle sequenze s, cioè la falsità di $M\models(\forall x_n)B$.

Abbiamo dunque dimostrato che tutte le formule di un insieme analizzato X sono vere in almeno una struttura parziale per X (che è la struttura canonica costruita con i simboli stessi del linguaggio), e con ciò abbiamo dimostrato che un qualsiasi insieme del genere è soddisfacibile nella semantica delle strutture parziali. Sia $M=\langle D,g\rangle$ la struttura canonica in questione. Ora, per il teorema 2.6 abbiamo che le formule di X continuano a essere vere in ogni completamento di M, cioè in ogni struttura del prim'ordine che "estende" M nel senso prima definito. Si prenda uno qualsiasi di questi completamenti, per esempio $M'=\langle D,g'\rangle$ cosí definito: per ogni costante a che non compare in X (e che quindi non è interpretata da g) $g'(a)=g(b)$, dove b è una qualsiasi costante cui g assegna un'interpretazione (e ce ne devono essere, poiché, grazie alla seconda clausola di (5") ogni insieme analizzato contiene occorrenze di costanti); per ogni lettera predicativa a n posti P che non compare in X, $g'(P)=\emptyset$. (Ovviamente, essendo un'estensione di g, g' si comporta esattamente come g con tutte le costanti individuali e le lettere predicative che occorrono in X.) In conclusione: (i) tutte le formule di X sono vere nella struttura parziale M per X; (ii) per 2.6 esse sono vere anche in M', che, in quanto completamento di M, è una effettiva struttura del prim'ordine. Abbiamo dunque dimostrato il punto (a) del seguente teorema:

2.9 (a) Se X è un insieme analizzato, allora X è soddisfacibile.
(b) In particolare, X è soddisfacibile in un dominio finito o numerabile.

Per quanto riguarda (b), basta osservare che, nel modello parziale "canonico" per X, l'universo D contiene solo quegli elementi (che altro non sono se non le costanti stesse di L1) che figurano nelle formule di X: e questi elementi saranno in quantità finita o, per male che vada, infinita numerabile (come le costanti individuali di L1, appunto).

TABLEAUX SISTEMATICI

Come vedremo, per la dimostrazione di completezza che stiamo considerando è essenziale che i rami di un tableau che non chiudono siano insiemi analizzati. Purtroppo, non è questo il caso in generale. A causa della regola per il quantificatore universale (che permette di aggiungere a un ramo infinite "esemplificazioni" di un enunciato universale), può infatti accadere che un ramo si estenda all'infinito senza che siano state prese in considerazione tutte le formule che stanno in quel ramo. Ecco un esempio molto semplice.

Voglio dimostrare:

(*) $\vdash (\forall x)Px \to \neg(\exists x)\neg Px$.

Si consideri allora il seguente tableau T:

$$\begin{gathered}
\neg((\forall x)Px \to \neg(\exists x)\neg Px)\\
(\forall x)Px\\
\neg\neg(\exists x)\neg Px\\
Pa\\
Pb\\
Pc\\
.\\
.\\
.
\end{gathered}$$

Questo tableau (costruito secondo le regole del sistema, anche se in modo non molto "intelligente") ha un unico ramo, che prosegue all'infinito senza mai prendere in considerazione la formula $\neg\neg(\exists x)\neg Px$. Abbiamo dunque una formula che non viene sviluppata, impedendo all'unico ramo (aperto) del tableau T di essere un insieme analizzato. (Si noti, fra l'altro, che la formula in (*) è valida. Eppure T, che è un tableau per la negazione di quella formula, *non chiude,* anche se ha lunghezza infinita! Questa è la differenza fondamentale rispetto al caso enunciativo, dove un tableau per un insieme inconsistente di formule deve chiudere dopo un numero *finito* di passi.)
Il nostro problema è dunque approntare un metodo di costruzione dei tableaux in base al quale ogni ramo aperto sia un insieme analizzato. (Come nelle sezioni precedenti, continueremo a prenderci la libertà di

identificare un ramo di un tableau con l'insieme delle formule che stanno in quel ramo.) Il metodo che presenteremo è una modifica di quello introdotto da Smullyan nel testo già citato, e la complicazione che comporta rispetto all'originale ha lo scopo di permettere - come vedremo - una dimostrazione del teorema di compattezza.

In realtà, poiché prenderemo in considerazione anche insiemi *infiniti* di formule, quelli che costruiremo non saranno veri e propri tableaux per insiemi di formule. Non si deve infatti dimenticare che il metodo dei tableaux - cosí come l'abbiamo caratterizzato - è definito formalmente da certe regole, e per lavorare con insiemi eventualmente infiniti di formule dovremo disattendere almeno in parte quegli schemi di costruzione. Quello che faremo sarà costruire alberi molto simili ai tableaux, indicando peraltro come *trasformare questi alberi in veri e propri tableaux quando l'insieme di formule su cui si lavora è finito.*

Sia dunque X un insieme (finito o infinito) di formule. Supponiamo che le formule di X siano disposte in una sequenza di enumerazione: $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (Esistono vari modi per farlo: assumiamo di averne a disposizione uno. Si ricordi che L1 contiene una quantità numerabile di simboli.)

Quello che vogliamo fare è indicare un metodo che, come nel caso dei tableaux, ci permetta ogni volta di estendere un albero prendendo in considerazione una formula. A ognuno di questi stadi l'albero ottenuto conterrà un numero finito di formule. Tra queste, chiameremo disponibili le formule che non sono già state usate precedentemente per estendere l'albero in costruzione. Diremo anche che un punto X di T è esaurito se contiene solo formule non disponibili.

Il primo stadio della procedura è semplice da descrivere: poniamo $\{A_1\}$ - cioè l'insieme costituito dalla prima formula dell'enumerazione - all'origine dell'albero.

Si tratta adesso di descrivere come passare, ogni volta, da uno stadio n a quello successivo, n+1. Si proceda in questo modo.

Se, una volta concluso lo stadio n l'albero "chiude" (nel senso in cui diremmo che un vero e proprio tableau chiude), o se ogni punto è esaurito, allora ci fermiamo.

Altrimenti, sia A la prima formula disponibile del primo[2] punto Y non esaurito e si faccia quanto segue.

Se A è $\neg\neg B$, ogni ramo non chiuso che passa per Y viene esteso aggiungendo a quel ramo il punto $\{ B \}$.

Se A è $\neg(B\rightarrow C)$, aggiungiamo $\{B,\neg C\}$.

Se A è $\neg(\forall x)B$, aggiungiamo $\{\neg B(a/x)\}$, dove a è la prima costante fra quelle che *non* compaiono in X.

Se A è $B\rightarrow C$, ogni ramo non chiuso che passa per Y avrà due estensioni, una ottenuta con l'aggiunta di $\{\neg B\}$, l'altra con l'aggiunta di $\{C\}$.

Se A è $(\forall x)B$, ogni ramo non chiuso α che passa per Y viene esteso aggiungendo il punto $\{B(a/x),(\forall x)B\}$, dove a è la prima costante tale che la formula $B(a/x)$ non occorre in α.

Fatto questo, si aggiunga la formula A_{n+1} a ogni ramo non chiuso dell'albero.

Consideriamo adesso l'albero così ottenuto. Esso non è formalmente un tableau per due motivi:

(i) Ogni volta che abbiamo una formula di tipo $(\forall x)B$ non ci limitiamo ad aggiungere il punto $\{B(a/x)\}$, come è consentito dalla regola per il quantificatore universale, ma ripetiamo l'occorrenza di $(\forall x)B$. (In questo modo garantiamo che, nei passi successivi, dovremo ancora prendere in considerazione $(\forall x)B$ per introdurre costanti sempre nuove.)

(ii) Prima di passare allo stadio n+1, lo stadio n viene concluso aggiungendo ai rami non chiusi il punto $\{A_n\}$: il che non è ovviamente previsto dalle nostre regole per i tableaux.

E' però facile vedere che, se l'insieme di formule X per il quale si fa la costruzione è finito (se cioè le formule di X sono enumerabili come $A_1,\ldots,A_n$ - per n finito), si può ovviare a entrambi gli inconvenienti. A partire dall'albero ottenuto nel modo appena descritto si otterrà infatti un vero e proprio tableau collocando all'origine X stesso. A questo punto potremo eliminare i punti in cui una formula A_i (per $1\leq i \leq n$) è stata ottenuta nel modo ricordato al punto (ii). (Infatti, essendo la formula già contenuta nell'origine, non c'è

[2] Per rendere univoca la procedura occorrono un paio di specificazioni. Il primo punto non esaurito è cosí determinato. Prendiamo il livello minimo (cioè più "in alto") dell'albero dove compaiono punti non esauriti e scegliamo il primo a sinistra di questi punti. Ma c'è un altro problema. In genere, in questa costruzione, i punti sono insiemi che contengono una o due formule. Non è quindi specificato quale sia la prima formula da sviluppare quando il punto ne contiene due. Ma per rendere univoca la procedura, è sufficiente specificare che, nel caso per esempio il punto $Y=\{A,\neg B\}$ sia stato ottenuto sviluppando $\neg(A\rightarrow B)$, allora A è la prima formula di Y da sviluppare e $\neg B$ la seconda. Qualcosa di analogo si può fare con altri punti contenenti due formule.

bisogno di "introdurla" nell'albero.) Infine, in tutti i punti in cui una formula di tipo $(\forall x)B$ è stata ripetuta nel modo ricordato in (i), cancelleremo semplicemente questa ripetizione. (Al posto del punto $\{B(a/x),(\forall x)B\}$ avremo dunque solo il punto $\{B(a/x)\}$, come previsto dalle regole per i tableaux.)
Si noti che, nel caso X sia infinito, la trasformazione appena descritta non è possibile. Se permettessimo infatti di collocare all'origine insiemi infiniti di formule, potrebbe accadere che tutte le costanti individuali di L1 siano presenti in quell'insieme, impedendo così l'applicazione della regola (f), che prevede il ricorso a nuove costanti, cioè a costanti non occorrenti nel ramo su cui si lavora.
In conclusione, se X è un insieme finito di formule il metodo descritto, più la relativa trasformazione, serve per costruire quello che chiameremo un tableau sistematico per X. Va però subito aggiunto che, dato un insieme finito X di formule, la nozione di tableau sistematico per X non è univoca, essendo possibili enumerazioni diverse delle formule in X (ognuna delle quelli genera ovviamente tableaux sistematici diversi). D'ora in poi, assumeremo che ci sia un modo fisso per enumerare le formule di un insieme X, il che ci permetterà di parlare *del* tableau sistematico per X. Vale la pena di aggiungere che, quando X è finito, in pratica nella costruzione del tableau sistematico per X si può partire direttamente ponendo X stesso all'origine e procedendo in modo da costruire proprio quel tableau che si ottiene "trasformando" l'albero costruito secondo la procedura descritta poco fa.
Ma veniamo al punto fondamentale di questa sezione, che ci servirà nella dimostrazione di completezza. Si tratta del seguente asserto, facilmente verificabile ispezionando il metodo di costruzione descritto:

2.10 Sia X un insieme finito di formule e T il tableau sistematico per X. Allora ogni ramo di T che non chiude è un insieme analizzato.

Prima di concludere, osserveremo che, in quanto si applica anche a insiemi infiniti di formule, la procedura di costruzione descritta in questa sezione ci permette di dimostrare il seguente (meta)teorema semantico, noto come teorema di compattezza:

2.11 Se tutti i sottoinsiemi finiti di un insieme X di formule sono soddisfacibili, allora anche X è soddisfacibile.

Consideriamo dunque la costruzione di prima per un insieme infinito X (è infatti questo il caso interessante per dimostrare 2.11). Per assunzione, essendo un sottoinsieme finito di X, l'insieme delle formule $A_1,\ldots,A_n$ è soddisfacibile (per ogni $n \geq 1$). E' facile vedere che, allo stadio n corrispondente, l'albero deve contenere dei rami $\alpha_1, \ldots,\alpha_k$ che non sono chiusi. Pertanto, quando passiamo allo stadio n+1, ci sarà almeno un'estensione α_i' di qualche α_i (per $i \leq k$) che non è chiusa (dal momento che anche l'insieme delle formule $A_1,\ldots,A_{n+1}$ è soddisfacibile), e così via. Proseguendo in questo modo per tutte le formule di X avremo almeno un ramo infinito che non chiude. Ma questo ramo, che contiene tutte le formule di X è un insieme analizzato e quindi, per 2.9, è soddisfacibile. Così X è soddisfacibile.
2.11 ha il seguente corollario, noto come teorema di Skolem-Löwenheim:

2.12 Se X è un insieme di formule soddisfacibile, X è soddisfacibile in un dominio finito o numerabile.

Nella dimostrazione di 2.11, per X infinito, abbiamo sfruttato il fatto che, nella costruzione descritta in questa sezione, un ramo che non chiude è un insieme analizzato, e questo insieme è soddisfacibile. Lo stesso accadrebbe ovviamente nella costruzione relativa a un X finito. Ma noi sappiamo (cfr. 2.9) che un insieme analizzato è soddisfacibile in un dominio finito o numerabile.

COMPLETEZZA (II)

Possiamo adesso riprendere - e concludere - il discorso sulla completezza del metodo dei tableaux. Come si ricorderà, si trattava di dimostrare il seguente asserto:

2.5 Se $Y \models A$, allora $Y \vdash A$.

Questa formulazione, in base alle definizione date a suo tempo, è però trasformabile in:

Se $Y\cup\{\neg A\} \models$, allora $Y\cup\{\neg A\} \vdash$

e quindi, per contrapposizione, in:

Se $Y \cup \{\neg A\}$ è consistente, allora $Y \cup \{\neg A\}$ è soddisfacibile.

Pertanto, 2.5 risulterà dimostrato se in genere, per ogni insieme finito X di formule, dimostreremo:

2.13 Se X è consistente, allora X è soddisfacibile.

Ma la dimostrazione di 2.13 è adesso a portata di mano. Infatti, che X sia consistente significa che nessun tableau per X è chiuso. Si prenda allora il tableau sistematico per X T: poiché non è chiuso, T deve avere qualche ramo α non chiuso, e, per 2.10, α è un insieme analizzato. (Si noti che questa affermazione vale solo per i tableaux sistematici, e ciò spiega perché li abbiamo fatti intervenire nella nostra dimostrazione, unitamente agli insiemi analizzati.) Ma, per 2.9, α è soddisfacibile e siccome X è un sottoinsieme di α, allora anche X è soddisfacibile.

Questo è dunque il risultato conclusivo al quale volevamo arrivare. Vale però la pena di aggiungere che il modo in cui è stato dimostrato (e cioè attraverso insiemi analizzati e tableaux sistematici) determina altre interessanti osservazioni, oltre ai teoremi 2.11 e 2.12 della sezione precedente. Ci limiteremo qui a menzionarne due.
Per la procedura che ne determina la costruzione, i tableaux sistematici hanno questa interessante caratteristica:

2.14 Se X è un insieme finito di formule e non è soddisfacibile, allora il tableau sistematico per X chiude dopo un numero *finito* di passi.

Non daremo qui la dimostrazione di questo asserto. Ci interessa invece la seguente osservazione informale. Assumiamo che X sia un insieme finito di formule. Allora, per 2.14, se X non è soddisfacibile, il tableau per X chiude dopo un numero finito di passi. D'altra parte, se X è *soddisfacibile in un dominio finito,* la costruzione del tableau sistematico per X - per quanto possa eventualmente proseguire all'infinito - determinerà a un certo stadio n un ramo non chiuso α che costituisce un insieme analizzato[3].
Intuitivamente, si tratterà dello stadio in cui in α:
(i) tutte le formule non atomiche distinte dalle universali sono state analizzate;
(ii) le formule universali sono state opportunamente "esemplificate" con tutte le costanti individuali che occorrono in α.
Essendo un insieme analizzato, α è soddisfacibile, e cosí lo sarà anche X, che è incluso in α.
Pertanto, sia nel caso dell'insoddisfacibilità che in quello della soddisfacibilità in un dominio finito, il metodo dei tableaux (attraverso il ricorso ai tableaux sistematici) ci permette di fornire una risposta affermativa in un numero finito di passi. Ciò non si verifica invece nel caso di insiemi di formule soddisfacibili solo in domini infiniti: in questa circostanza, infatti, il tableau può proseguire all'infinito senza che si trovi una risposta.
La seconda osservazione è la seguente. Come si è specificato, il risultato di completezza finora ottenuto vale solo per insieme finiti di formule (si parla infatti di completezza debole). Ma è possibile generalizzare l'asserto 2.5 facendo cadere la restrizione che l'insieme Y sia finito.
Si supponga che Y sia infinito e che valga $Y \models A$, cioè $Y \cup \{\neg A\} \models$. Allora, per il teorema di compattezza, vale anche $Z \models$, per qualche sottoinsieme finito Z di $Y \cup \{\neg A\}$. Per monotonicità, vale $Z \cup \{\neg A\} \models$, cioè $Z \models A$. Quindi, per 2.13, $Z \vdash A$.
Le considerazioni appena fatte dimostrano dunque il seguente asserto, assimilabile al concetto forte di completezza (non limitato a insiemi finiti di formule):

2.15. Sia Y un insieme qualsiasi di formule (quindi anche infinito, eventualmente). Se $Y \models A$, allora c'è qualche insieme finito Z tale che $Z \subset Y$ e $Z \vdash A$.

[3] Nel senso definito qui, in cui non necessariamente tutte le costanti del linguaggio vengono usate per esemplificare una formula universale. Cosí, l'osservazione che stiamo sviluppando (contenuta sostanzialmente in Smullyan, cito., p. 63) è un'ulteriore dimostrazione dell'interesse che ha la versione degli insiemi analizzati presentata qui.