Sascia Pavan
s.pavan@tele2.it

Brevissima introduzione alla Teoria dei Giochi[1]

La Teoria dei Giochi è una branca della matematica il cui scopo è spiegare il comportamento di più agenti razionali – i giocatori – in situazioni in cui ogni giocatore deve operare delle scelte, tali che l'esito delle scelte di ogni giocatore dipende anche dalle scelte effettuate dagli altri giocatori.

GIOCHI IN FORMA STRATEGICA

Possiamo limitarci a considerare due tipi di gioco, quelli in *forma strategica* e quelli in *forma estesa*. In un gioco in forma strategica, ogni giocatore ha a disposizione un certo numero di alternative che chiamiamo 'strategie'. Ogni giocatore deve scegliere una di queste strategie, ed ogni combinazione di strategie assegna ad ogni giocatore un guadagno. Facciamo un esempio. Abbiamo un insieme di due giocatori, $\{1,2\}$, le strategie di 1 sono $\{A,B\}$, quelle di 2 $\{X,Y\}$. i guadagni dei giocatori sono determinati dalla seguente tabella, in maniera tale che il primo numero di ogni riquadro corrisponde al guadagno del giocatore 1 per quella combinazione di strategie, il secondo numero al guadagno del giocatore 2.

		2		
		X	*Y*	*Z*
1	*A*	3,0	0,2	0,3
	B	2,0	1,1	2,0
	C	0,3	0,2	3,0

Una data combinazione di strategie viene chiamata 'profilo'. Ad esempio $\{A,X\}$ e $\{B,Y\}$ sono due profili. Obiettivo di ogni giocatore è ottenere il massimo guadagno possibile, ma il guadagno che verrà ottenuto da un giocatore dipende anche dalla strategia adottata dall'altro giocatore. La teoria dei giochi vuole che ogni scelta sia razionale e l'essere una strategia razionale o meno deve dipendere esclusivamente dalla

[1] Tutte le nozioni qui presentate si trovano in Myerson (1991: capp. 2-5), e Osborne e Rubinstein (1994: capp. 1-7, 11, 12). La notazione riprende prevalentemeente quella di Myerson.

struttura del gioco. Viene sempre assunto che ogni giocatore conosce la struttura del gioco, sa che ogni altro giocatore la conosce, ecc.. In termini tecnici la struttura generale del gioco è *conoscenza comune*. Pertanto, se una data strategia di 1 è una scelta razionale, allora 2 può aspettarsi che quel giocatore faccia quella scelta, ed è dunque in grado di rispondere con la strategia più vantaggiosa per sé. Ma questo deve poterlo dedurre anche 1. In questo gioco, ad esempio, se 1 sceglie *A*, la strategia più conveniente per 2 è *Z*. Se dunque esiste un argomento in base al quale *A* è una buona strategia, anche 2 può usarlo per prevedere che 1 sceglierà *A*, e questo indurrebbe 2 a scegliere *Z*. Ma questo stesso ragionamento che indurrebbe 2 a scegliere *Z* dovrebbe convincere 1 a scegliere *C*, invece che *A*. Questo mostra che era falsa la supposizione che *A* fosse una scelta ragionevole. Un profilo di strategie è un *equilibrio di Nash* se nessuno dei giocatori trarrebbe vantaggio dal deviare dalla strategia di questo profilo, assumendo che tutti gli altri giocatori si attengano alla strategia da esso prevista. Nel gioco descritto sopra $\{B,Y\}$ è l'unico equilibrio di Nash. Ai giocatori possiamo dare possibilità di scelta più ampie di quelle descritte finora, possiamo cioè consentire loro di adottare piani che suonino così: 'Al 70% userò la strategia *X*, al 30% userò la strategia *Y*. Strategie così formulate vengono chiamate strategie *miste*, o *randomizzate*. Diciamo allora che nell'esempio di prima *A*, *B*, *X* e *Y* erano strategie *pure*. Consideriamo le strategie pure come un caso limite di strategia mista.

Tirando le somme, un gioco in forma strategica è un insieme $\{N, C, u\}$, dove $N=\{1,2,...\}$ è un insieme finito e corrisponde all'insieme dei giocatori. Per ogni giocatore i esiste un insieme C_i i cui elementi sono le strategie (pure) a disposizione di i, e $C= \times_{i\in N}C_i$;[2] C è dunque l'insieme dei profili di strategie dei giocatori. Per ogni giocatore i esiste una *funzione di utilità* u_i:$C\rightarrow\mathbf{R}$ – ove **R** è l'insieme dei numeri reali – che ad ogni profilo di strategie assegna il guadagno che ne ricaverebbe il giocatore i; $u= \times_{i\in N}u_i$. Una strategia mista per un giocatore i è una funzione σ_i: $C_i\rightarrow[0,1]$, ove $[0,1]$ è l'intervallo chiuso tra i numeri 0 e 1 sulla retta **R**, tale che per ogni $c_i\in C_i$, $\sigma_i(c_i)\geq 0$ e

$$\sum_{c_i\in C_i}\sigma_i(c_i)=1 \quad .$$

[2] Nei limiti di questa introduzione, considererò solo giochi in cui tanto i giocatori, quanto le loro strategie pure siano in numero finito.

Un profilo di strategie miste σ è allora un prodotto cartesiano $\sigma = \times_{i\in N}\sigma_i$, ove ognuno degli σ_i è una strategia mista per un giocatore *i*. Una strategia mista σ_i in cui c'è un $c_i \in C_i$ tale che $\sigma_i(c_i)=1$ – cioè una strategia pura – la indichiamo con $[c_i]$.

Qual è il guadagno di un giocatore nel caso vengano usate strategie miste? Si parla, in questo caso, di *guadagno atteso*, e viene definito così:

$$\sum_{c\in C}\left(\prod_{j\in N}\sigma_j(c_j)\right)u_i(c)=1 \qquad (1)$$

.

Prendiamo un gioco come 'Pari e dispari', rappresentato dallo schema seguente.

		2	
		p	*d*
1	*P*	1,0	0,1
	D	0,1	1,0

[3]

In questo gioco non vi sono equilibri tra i profili con strategie pure, ma ve n'è uno con strategie miste. In realtà, se si includono anche le strategie miste, si dimostra che in ogni gioco c'è sempre almeno un equilibrio di Nash. In questo caso. ce n'è uno solo ed è $\sigma_1(P)=\sigma_1(D)=\sigma_2(p)=\sigma_2(d)=0.5$. Consideriamo ora il gioco seguente.[4]

[3] Questo tipo di gioco viene solitamente chiamato 'Matching Pennies'.

[4] Nella letteratura, questo tipo di gioco a volte prende il nome di 'Bach o Stravinsky?', a volte invece viene chiamato 'Battaglia dei sessi'.

		2	
		b	*s*
1	*B*	3,1	0,0
	S	0,0	1,3

Ha due equilibri in strategie pure, {[*B*],[*b*]} e {[*S*],[*s*]}, e uno in strategie miste in cui $\sigma_1(B)=\sigma_2(s)=0.75$, $\sigma_1(S)=\sigma_2(b)=0.25$. In quest'ultimo profilo, 1 sceglie *B* tre volte su quattro, e una su quattro sceglie *s*. Il modo più semplice per intendere questo è immaginare che 1 scelga a caso secondo queste probabilità. Ma non è quello più intuitivo – raramente i giocatori hanno l'impressione di scegliere una strategia in questo modo – e può essere fuorviante. Il fatto che 1 scelga *B* con una probabilità maggiore rispetto a *S* può far pensare che abbia una leggera preferenza per *B*. Questo non può essere. Anche una minima preferenza per *B* dovrebbe indurlo a scegliere [*B*]. In realtà, in un equilibrio con strategie miste, un giocatore è sempre indifferente tra tutte le strategie pure a cui la sua strategia mista assegna un valore superiore a zero. Una interpretazione più interessante di una strategia mista di un giocatore la vede invece come l'espressione di una previsione che gli altri giocatori fanno sul suo comportamento.[5] Il significato dell'equilibrio misto di questo gioco è pertanto che, quando 2 crede che 1 al 75% sceglierà *B* e al 25% sceglierà *S*, allora è indifferente tra le sue due strategie *b* ed *s*. In base all'equazione (2), dato un profilo misto σ, il guadagno atteso per il giocatore 2 è

$$\sum_{c_1 \in C_1} \sigma_1(c_1) \sum_{c_2 \in C_2} \sigma_2(c_2) u_2(c_1, c_2) \quad (2)$$

Poiché $\sigma_1(S)=1-\sigma_1(B)$, e $\sigma_2(s)=1-\sigma_2(b)$, la formula (2) diventa

$$[4\sigma_1(B)-3]\sigma_2(b)+3-3\sigma_1(B) \quad (3)$$

Obiettivo di 2 è massimizzare il guadagno atteso (3). Pertanto, quando il valore di $\sigma_1(B)$ è tale da rendere positivo il coefficiente espresso dalla parentesi quadra, 2 deve dare a $\sigma_2(b)$ il massimo valore possibile, cioè 1, cioè scegliere la strategia [*b*]. Quando la parentesi quadra è negativa, 2 deve dare a $\sigma_2(b)$ il minimo valore possibile, cioè 0, e la scelta migliore

[5] Vedi Osborne e Rubinstein (1994: 39, 43-44).

per 2 è pertanto [*s*]. Se invece il valore dentro la quadra è nullo – questo accade appunto con $\sigma_1(B)$=0.75 – è per 2 del tutto indifferente se sceglie-re *b* o *s*. Poiché il gioco è perfettamente speculare, lo stesso vale per 1, ed ecco spiegati i tre equilibri.

Per molti giochi, i profili di strategie miste che sono equilibri di Nash possono essere più di uno e, in alcuni casi, alcuni di questi possono apparire irragionevoli. Ecco perché sono stati sviluppati dei *raffinamenti* della nozione di equilibrio, il cui scopo è imporre restrizioni più forti, in maniera tale da ridurre il numero di profili da considerare ragionevoli in un gioco. Il raffinamento più importante è quello di *equilibrio perfetto*. L'idea è che le strategie che costituiscono un equilibrio perfetto sono ottimali anche se si concede che per ogni giocatore vi sia una 'piccola' probabilità che questi commetta un errore nel portare avanti una strategia. Per usare una metafora, si lascia aperta la possibilità che ai giocatori possa tremare la mano quando tocca a loro agire, da cui il nome di 'equilibrio perfetto con mano tremante'. La definizione è questa. Un profilo di strategie miste σ è perfetto sse esiste una sequenza infinita

$$(\sigma^k)_{k=1}^{\infty}$$

di profili perturbati, tali che, per ogni giocatore *i* e ogni strategia $c_i \in C_i$, $\sigma^k(c_i)>0$,[6]

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_i^k(c_i)=\sigma_i(c_i)$$

e per ogni giocatore *i* e ogni *k*, σ_i è una strategia ottimale quando gli altri giocatori seguono la strategia indicata da σ^k. È chiaro che ogni equilibrio perfetto è un equilibrio di Nash, ma in generale non vale l'inverso.

GIOCHI IN FORMA ESTESA

In un gioco in forma strategica si immagina che i giocatori scelgano la strategia da adottare simultaneamente, all'insaputa l'uno dell'altro. In un gioco in forma estesa, invece, si tiene conto dell'ordine in cui vengono operate le scelte, in maniera tale che un giocatore può avere una conoscenza, più o meno perfetta, delle scelte che sono state fatte in una data fase del gioco. Possiamo rappresentare un gioco in forma estesa come un diagramma ad albero. Per convenzione diciamo che la *radice* di que-

[6] Cioè ogni strategia pura viene giocata con una probabilità strettamente positiva.

st'albero è il nodo che sta più a sinistra, dunque l'albero si dirama da sinistra verso destra. Vi sono tre tipi di nodi. 1) Nodi *decisionali*. Corrispondono ad una situazione in cui un giocatore deve fare una scelta, in altre parole è il suo turno per fare una *mossa*. I rami che partono da questo nodo e vanno verso destra sono le mosse che il giocatore ha a disposizione in quella situazione. 2) Nodi *casuali*. Corrispondono all'accadere di eventi casuali, rappresentati dai rami che partono da questi nodi. Per ognuno di questi nodi, i relativi eventi casuali sono mutuamente esclusivi, uno di essi deve accadere e non ne può accadere più di uno. Possiamo pensare a questi eventi come mosse fatte da un giocatore speciale che chiamiamo 'Natura'. Non è un vero giocatore perché non le vengono attribuiti degli obiettivi e non è pensata come un agente razionale. La probabilità che ognuno di questi eventi ha di accadere viene indicata con un numero reale compreso tra 0 e 1. Questi valori sono conoscenza comune per tutti i giocatori. 3) Nodi *terminali*. Non hanno nessun ramo alla loro destra, corrispondono ai vari modi in cui un gioco può terminare. Per ogni giocatore i e ogni nodo terminale x, una funzione w_i stabilisce il guadagno che i ottiene se il gioco termina in x.

L'insieme dei nodi decisionali viene suddiviso con una partizione. I sottoinsiemi che costituiscono la partizione vengono chiamati *insiemi informativi*. L'idea è che, se dei nodi appartengono ad uno stesso insieme informativo, allora il giocatore che deve prendere una decisione in corrispondenza di quei nodi è il medesimo, ma a priori non sa in quale di questi egli si trovi.[7]

Ad ogni nodo decisionale assegniamo un'etichetta, un numero seguito da una lettera. Il numero indica il giocatore che deve operare una scelta in corrispondenza di quel nodo, la lettera sta per l'insieme informativo a cui appartiene quel nodo. Di conseguenza, tutti i nodi di uno stesso insieme informativo hanno la stessa etichetta. Anche ai rami viene assegnata un'etichetta, cioè il nome che diamo alla mossa rappresentata da quel ramo, in maniera tale che due rami che originano da due nodi di uno stesso insieme informativo hanno la stessa etichetta. Di solito, i nodi di uno stesso insieme informativo vengono collegati da una linea tratteggiata, oppure racchiusi entro la stessa linea chiusa, o comunque segnalati con qualche altro espediente del genere.

---

[7] Dico 'a priori' perché ogni giocatore sarà sempre in grado di assegnare una probabilità alla possibilità di trovarsi in un determinato nodo, fino al caso in cui un giocatore, pur trovandosi a dover scegliere una mossa in un insieme decisionale con più di un nodo, ragionando sulla struttura del gioco, arrivi alla certezza di trovarsi in un determinato nodo. In ogni caso, comunque, l'assegnazione di un valore di probabilità è sempre relativa ad un profilo di strategie miste.

In un gioco in forma estesa, una strategia di un giocatore specifica una mossa, per ogni insieme informativo in cui toccherebbe a quel giocatore operare una scelta.

Generalmente, la nozione di equilibrio viene applicata ai giochi in forma estesa attraverso una loro rappresentazione in forma strategica. Ve n'è di due tipi: la *rappresentazione normale* e la *rappresentazione multiagente*.[8]

La rappresentazione normale di un gioco in forma estesa Γ^e è un gioco in forma strategica $\{N, C, u\}$, in cui N è lo stesso insieme di giocatori di Γ^e, $C= \times_{i\in N}C_i$, ove, per ogni i, C_i è l'insieme delle strategie pure di i in Γ^e. Definire le funzioni u_i è più complicato. Prima di tutto, per ogni nodo x e ogni profilo di strategie $c\in C$, definiamo per induzione la probabilità $P(x|c)$ che l'azione del gioco passi per x, se le strategie effettivamente scelte dai giocatori sono quelle di c. Se x è la radice, allora $P(x|c)=1$. Se x segue immediatamente un nodo casuale y, e q è la probabilità assegnata al ramo che collega x a y, allora $P(x|c)=qP(y|c)$. Se x segue immediatamente un nodo decisionale y del giocatore i, e r è la mossa che la strategia c_i del profilo c assegna per l'insieme informativo di cui y fa parte, allora, se r collega x a y $P(x|c)=P(y|c)$, altrimenti $P(x|c)=0$. Sia Ω l'insieme di tutti i nodi terminali. Le funzioni u_i vengono definite così. Per ogni giocatore i e ogni profilo di strategie c, $u_i(c)= \Sigma_{x\in\Omega} P(x|c)w_i(x)$.

Una rappresentazione multiagente di un gioco in forma estesa Γ^e, invece, è un gioco in forma strategica $\{N, C, u\}$, in cui ogni insieme informativo di Γ^e è rappresentato da un elemento distinto di N, che chiamiamo 'agente'. $C= \times_{a\in N}C_a$, ove, per ogni agente a, C_a è l'insieme delle mosse disponibili ad a. Le funzioni u_a della rappresentazione multiagente di un gioco Γ^e vengono definite in maniera tale che, se l'insieme informativo corrispondente ad un agente a è associato ad un giocatore i di Γ^e, allora $u_a= u_i$, ove u_i è la funzione di utilità del giocatore i nella rappresentazione normale di Γ^e.

È a questo punto ovvio che le nozioni di equilibrio di Nash ed equilibrio perfetto possono venire applicate tanto alla rappresentazione normale che alla rappresentazione multiagente di un gioco in forma estesa. Esistono altre nozioni di equilibrio per i giochi in forma estesa che non passano attraverso le rappresentazioni normali o multiagenti, tra tutte quelle di *equilibrio perfetto nei sottogiochi* e di *equilibrio sequen-*

---

[8] Quest'ultima viene anche chiamata 'agente-normale' e 'agente-strategica' (Myerson 1991: 61; Osborne e Rubinstein 1994: 250).

ziale. Non ne fornisco qui la definizione, mi limito a dire che ogni equilibrio perfetto nei sottogiochi di un gioco in forma estesa è un equilibrio di Nash tanto della sua rappresentazione normale che di quella multiagente; che ogni equilibrio sequenziale è un equilibrio perfetto nei sottogiochi; e che ogni equilibrio perfetto della rappresentazione multiagente di un gioco in forma estesa è anche un suo equilibrio sequenziale.[9] Vale forse la pena di notare che vi sono casi in cui un equilibrio perfetto della rappresentazione normale di un gioco in forma estesa non è un equilibrio perfetto nei sottogiochi, dunque nemmeno un suo equilibrio sequenziale, né un equilibrio perfetto della sua rappresentazione multiagente. E vale anche il contrario, vi sono cioè giochi in forma estesa in cui un equilibrio perfetto della sua rappresentazione multiagente non è un equilibrio perfetto della sua rappresentazione normale.[10]

EFFICIENZA PARETIANA

Quando in un gioco v'è più di un equilibrio, è possibile che i giocatori convergano su uno di essi in virtù di qualche proprietà che lo rende saliente.[11] Una delle nozioni che più vengono impiegate per rendere conto di questo è *l'efficienza Paretiana*. Si dice che un profilo di strategie è (debolmente) *Pareto efficiente* o *Pareto dominante* quando non c'è nessun altro profilo che sarebbe più vantaggioso per tutti i giocatori. È utile notare che un profilo Pareto dominante non è necessariamente un equilibrio di Nash, come mostra l'esempio seguente, noto come 'dilemma del prigioniero'.

		2	
		a	*c*
1	*A*	5,5	0,6
	C	6,0	1,1

[9] Tecnicamente, questo non è proprio vero, perché, per essere precisi, un equilibrio sequenziale è una coppia $\langle\sigma,\pi\rangle$, ove σ è un profilo di strategie miste e π è una funzione che specifica, per ogni nodo decisionale x di un giocatore i, la probabilità che i dà alla possibilità di trovarsi in x, relativamente al profilo σ. Bisognerebbe dire che ogni *scenario* di un equilibrio sequenziale è un equilibrio perfetto nei sottogiochi, e che ogni equilibrio perfetto della rappresentazione multiagente di un gioco in forma estesa è lo scenario di un equilibrio sequenziale di quel gioco.

[10] Osborne e Rubinstein (1994: 250-253).

[11] Myerson (1991: 108-114).

$\{[C],[c]\}$ è l'unico equilibrio del gioco, ma $\{[A],[a]\}$ è Pareto dominante. In *alcuni* casi, quando vi è più di un equilibrio ma solo uno di essi è Pareto dominante, *può* essere ragionevole prevedere che i giocatori tenderanno a convergere verso quest'ultimo.[12]

BIBLIOGRAFIA

Myerson, R. 1991. *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts

Osborne, M.J. e A. Rubinstein 1994. *A Course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge Massachusetts

[12] Ho sottolineato ' alcuni' e 'può' perché non c'è nessuna stringente ragione generale che costringa a prevedere che i giocatori convergeranno su un equilibrio efficiente.