

Frammenti epistemologici

Giovanni Piana



Giovanni Piana

Opere Complete
Volume ventiseiesimo

Frammenti epistemologici

2015



<https://www.lulu.com/it>

Copyright @ Giovanni Piana (2015)
Edizione a stampa Lulu.com: 2015
Creative Commons License 2.0
CC Attribuzione - Non opere derivate 2.0
Codice della Licenza: CC BY-ND 3.0 IT



Indice

Nota introduttiva | 9 |

I

Sullo spazio

| 10 |

Pratiche della spazialità

Lo spazio e le cose

La figura e l'estensione

Lo spazio e l'aperto

Idealizzazioni

Spazio geometrico e spazio del mondo

Lobachevsky

Ordo rerum

Cose, relazioni, luoghi

Geometria e analysis situs

Spazio assoluto

Generalizzazione

II

Immaginare e raffigurare lo spazio

| 46 |

Una piramide nel deserto

Immaginare e raffigurare lo spazio

Il simbolismo degli aspetti

Sui quattro bellissimi corpi

| 52 |

*Geometria e mito**La maternità dello spazio**Il grande animale**Le quattro materie primigenie**Schema dell'interpretazione platonica**Il problema della triangolazione**La riduzione al triangolo "platonico"**La bellezza del triangolo platonico**Il triangolo platonico e il triangolo equilatero**Le trasformazioni reciproche**Il cubo, ovvero la terra**Fuoco aria acqua. Il pesante e il leggero**Ragionamenti bastardi**Il dodecaedro ovvero della totalità*

Sul numero e su altri argomenti

| 95 |

*Incommensurabilità e numeri irrazionali**Convenzioni ed evidenze**Ordine e concatenazione**Symbolismi**Logica e linguaggio corrente**Numero e tempo**Rigore**Teoria e storia*

Intuizione e costruzione

| 118 |

*Intuizione**Costruzione**Intuizione ed evidenza**Intuitività dell'oggetto e comprensibilità della regola per la sua costruzione*

L'aritmetica prima dell'aritmetica

| 132 |

*La fortuna e la sfortuna della Filosofia dell'aritmetica**I compiti di una filosofia dell'aritmetica secondo Husserl.**Il numero come concetto aperto**Il luogo del problema**Numero e molteplicità**Rappresentazione diretta e rappresentazione simbolica del numero**Problematica dei numeri immaginari**Lo zero e l'uno**Le operazioni pre-aritmetiche**L'invenzione dell'aritmetica**Il metodo logico dell'aritmetica**Aritmetica e arte del calcolo**Il problema della computabilità*

VII

L'aritmetica senza l'astrazione

| 172 |

*Il grande pensiero di Frege**Il numero si enuncia di un concetto**Numeri e astrazione**Equinumerosità e corrispondenza biunivoca**Numero e relazione**Definizione per astrazione?**Il metodo definitorio di Frege non ha a che vedere con l'astrazione**Una conferma tratta da Russell*

VIII

Sull'idea di "Fisica ingenua" in Paolo Bozzi

| 188 |

IX

È giusto parlare di "Intelligenza artificiale"

| 195 |

X

Appendici

Esempi di impiego di procedure realizzate
con il programma *Mathematica*

| 203 |

Avvertenza

1. Procedure formali per la successione dei numeri naturali
2. Procedure per realizzare un linguaggio L-systems
3. Procedure di calcolo per il "triangolo di Sarngadeva"
4. Procedure per la realizzazioni di "flussi sonori"

Nota introduttiva

In questo testo propongo annotazioni brevi su diversi argomenti trattati in altre mie pubblicazioni che rientrano nel campo delle problematiche epistemologiche. Si tratta di appunti preparatori, note prese in margine a letture antiche e recenti, talora senza un ordine organico, talaltra fornendo invece tracce di discorso relativamente organiche. Mi auguro che, oltre a completare l'orizzonte di idee esposte altrove, almeno alcune di esse possano stimolare il lettore ad approfondimenti ed estensioni che qui non sono state realizzate. I tempi della scrittura sono differenti, e del resto non sono importanti. Voglio solo segnalare che la sezione VIII, *Sull'idea di Fisica ingenua in Paolo Bozzi*, riprende letteralmente un intervento proposto durante un incontro dibattito con Stefano Jacomuzzi e Corrado Mangione, alla presenza di Paolo Bozzi in occasione della pubblicazione del suo libro intitolato *Fisica ingenua*, Garzanti, Milano, 1990. Pubblico questo intervento come omaggio all'amico fraterno, scomparso nel novembre del 2003. A Corrado Mangione, a cui debbo amicizia e dottrina, anch'egli scomparso nel 2009, dedico lo scritto della sezione IX, *Sull'espressione "Intelligenza artificiale"*: esso fu redatto in occasione di un dibattito sull'intelligenza artificiale trasmesso da Radiotre e diretto da Corrado Mangione che mi invitò a partecipare ad esso con cortese ed affettuosa insistenza.

Due parole vanno dette poi sulle Appendici. Esse sono leggibili ed eventualmente utilizzabili e messe alla prova solo da chi conosce il programma informatico *Mathematica* della Wolfram Research. Ho voluto aggiungere queste appendici per documentare l'importanza che ha avuto quel programma in alcune mie ricerche ed anche, implicitamente, per sollecitare l'impiego dei nuovi mezzi messi a disposizione dal calcolatore anche sul terreno della riflessione filosofica; oltre che su quello della didattica della matematica, che ai tempi della mia gioventù era, a mio avviso, molto carente sotto più di un aspetto. Queste appendici sono proposte nel mio Archivio Internet anche in forma leggibile da quel programma.

Roma, 23 maggio 2015

I

Sullo spazio

Pratiche della spazialità

– Abbiamo una nozione quotidiana dello spazio? Intanto possiamo dire di avere una *pratica* della spazialità. Ciascuno di noi ha un “concetto” della spazialità, ovvero una *concezione implicata nelle pratiche*. Che cosa puoi dire tu a questo proposito?

– Debbo ammettere che il parlare di una “nozione quotidiana”, comunque essa possa essere intesa, mi mette in imbarazzo. È sicuro invece che usiamo *parole* attinenti allo spazio. Ecco un esercizio che in apparenza non ha nulla di filosofico: supponiamo che si debba realizzare il compito di sottolineare, in un elenco di parole – aggettivi, avverbi, verbi, come rosso, vuoto, noioso, abete, sinistra, desiderare, frettolosamente, vedere, profondo, camminare... – quelli che sono attinenti allo spazio, che lo implicano in qualche modo. Un simile esercizio potrebbe essere utile, per cominciare.

– Vi sono determinazioni spaziali che forse possiamo indicare con il termine di direzione. *A destra, a sinistra, avanti, dietro, sopra, sotto*. La direzione richiede un punto da cui assume senso il parlare di essa, una sorta di *centro delle direzioni*. A destra, a sinistra... ma di dove?

– Il *qui* e il *là* diventano designazioni di luoghi. Non lo sono fin dall’inizio. Sarei tentato di dire: in uno stadio infantile del nostro sviluppo vi è certamente una condizione nella quale la frase “io sono qui” non ha affatto il senso di “io sono in un luogo”. Vi è una condizione nella quale c’è la nozione del *qui* ma non quella del luogo.

– Sopprimendo il centro delle direzioni si sopprime ogni direzione oppure si può porre come centro una sorta di sostituto formale di esso (come il punto zero negli assi cartesiani). Lo spazio ha un'*origine*. In assenza di un centro o di un riferimento centrale, vi può essere una determinazione puramente relazionale. In tal caso lo spazio non avrebbe un'*origine*. O meglio: un luogo qualunque di esso potrebbe essere preso come origine, e fungere dunque come centro di direzioni.

– Tra “direzioni” in un senso che si riferisce esclusivamente alle pratiche della spazialità, e “dimensioni” nel senso in cui se ne parla in geometria vi è certamente una qualche relazione (ma anche una differenza). Le dimensioni sono tre poiché essenzialmente tre sono le direzioni (con le loro opposte). Avanti, a destra, sopra (dietro, a sinistra, sotto). Lo spazio è tridirezionale, e forse potrei dire addirittura tridimensionale. Di ciò sono assolutamente certo. In effetti non saprei in quale altra direzione andare...

– Vi è una pratica dello spazio che è un'esperienza dell'andare, del camminare, del movimento.

– La parola “vuoto” appartiene all'area di senso delle parole spaziali. Nel buio mi muovo a tentoni, con le mani protese in avanti per accertarmi che di fronte a me non ci sia nessuna cosa che impedisca il mio cammino, per il quale il vuoto di fronte a me è una condizione evidente.

– “Vuoto” è una parola enigmatica se di essa tentiamo di farne fin dall'inizio un impiego oggettivo. Considera in che senso si può dire: il vuoto è condizione del movimento. Quando dico questo, *facendo riferimento al mio movimento*, so quello che dico. Se invece ci si chiede se esiste o non esista il vuoto, si avverte oscuramente che il riferimento è cambiato, che la parola stessa tende

ad avere un altro senso – che essa è entrata in un nuovo gioco linguistico.

– Se nulla viene incontrato dalle mani protese allora di fronte c'è il vuoto, e questo fatto significa semplicemente che posso andare avanti. Le mani protese non intendono toccare qualcosa, ad esempio, per conoscerla nelle sue proprietà tattili, ma sperimentano se in quella direzione si incontra la cosa che ora ha solo il senso di barriera e ostacolo al cammino. Cosa e spazio stanno qui l'una contro l'altra come il pieno e il vuoto.

– Lo spazio al buio. Lo spazio per chi non vede. L'esperienza dello spazio è qui legata alla differenza tra vuoto e pieno. Il momento spaziale si rivela ora come “vuoto di fronte”, “vuoto a destra”, “vuoto a sinistra”, ecc. Nel buio ci sono in ogni caso le direzioni.

– Eppure Aristotele riteneva che l'esistenza del vuoto avrebbe impedito il movimento. Ecco un buon esempio di che cosa può accadere quando una parola, che viene impiegata secondo le pratiche che noi abbiamo con la realtà, entra in una teoria. Essa viene “concettualizzata”, ovvero *entra in una rete di concetti, da cui ormai dipende il suo senso*. La rete può essere talmente ampia da implicare un'intera concezione dell'Universo. Come spiega molto semplicemente Koyré: secondo Aristotele “il tutto, l'ordine cosmico, l'armonia sono concetti che richiedono che le cose nell'universo siano (o debbano essere) distribuite e disposte in un certo ordine determinato; che la loro posizione non sia una questione indifferente (né per esse né per l'Universo); che, al contrario, ogni cosa, secondo la sua natura, abbia una determinata “posizione” nell'Universo, che in certo senso è la sua” (Koyré, 1973, p. 147). Ora, è questa idea della “posizione naturale”, che a sua volta rimanda ad un ordine cosmico, che determina la teoria del moto. “Infatti se tutto fosse ‘in ordine’, ogni cosa sarebbe nella

sua posizione naturale e ovviamente, rimarrebbe lì per sempre. Perché dovrebbe allontanarsene?” (ivi, 147). Se se ne allontana, deve esserne costretta da una qualche azione violenta, cessata la quale la cosa cercherà di ritornare al proprio posto – e questo è il moto “naturale”. In questo contesto va situato l’idea del vuoto e del suo rapporto con il movimento. Quando il corpo, rimosso con la violenza dal suo posto naturale, tenderà a ritornare ad esso “per la via più corta e più rapida. Ne segue che ogni movimento naturale avviene in linea retta e che ogni corpo si muove verso la sua posizione naturale il più velocemente possibile; cioè quanto più velocemente glielo permette tutto ciò che lo circonda e che resiste e si oppone al suo movimento. Se quindi non vi fosse nulla ad arrestarlo, se il mezzo circostante non opponesse nessuna resistenza al moto del corpo (come avverrebbe nel caso del vuoto) esso si muoverebbe verso la sua posizione con velocità infinita. Ma tale movimento sarebbe istantaneo, cosa che ad Aristotele sembra - e a buona ragione – assolutamente impossibile. La conclusione è ovvia: nessun movimento naturale può aver luogo nel vuoto” (ivi, p. 151). Eccoci all’interno di una teoria. Non camminiamo più a tentoni nella nostra stanza, ma stiamo riflettendo sul concetto “movimento”. In questa riflessione è implicata un’idea fortemente statica dell’ordine e dell’armonia dell’Universo e seguendo coerentemente questa idea arriviamo a sostenere l’impossibilità del movimento nel vuoto.

– In realtà la costituzione dello spazio non è originariamente legata agli organi più elementari della *conoscenza* della realtà, come la vista o il tatto. Un’esperienza della spazialità è ancora possibile se prescindiamo dal “percepire” (vedere, toccare, udire...). Essa è anzitutto legata al movimento: anzitutto alla *mia* possibilità di movimento, all’esser qui ed al poter essere là; all’andare, al percorrere. Quale potrebbe essere l’immagine dello spazio di una statua viva che nemmeno possa sognare la possibilità del movimento?

- Abbiamo detto che protendo le mani, a occhi chiusi, per accertare la possibilità del cammino. La cosa è ora la “pienezza” che si oppone ad esso. Secondo un’altra inclinazione di senso, pienezza è anche il terreno tastato dai nostri piedi.

- Il terreno ha tuttavia i suoi pericoli. Percorriamo un cammino ad occhi chiusi e tastiamo il terreno di fronte a noi con un bastone. Il terreno può essere sentito come malsicuro, un *vuoto* potrebbe esserci in esso. Ora il vuoto ha un altro senso. È tutto meno che la possibilità di un cammino. È baratro e precipizio. Possibilità di una caduta. Forza di gravità. Noi ci muoviamo nello spazio con tutto il nostro peso.

- La possibilità della caduta “è fondamentale per la comprensione dell’intera vita umana; ed infatti lo schema spaziale vale al tempo stesso in senso trasposto per l’intera situazione dell’uomo” (Bollnow, 1980, p. 48).

Lo spazio e le cose

- Se ci si chiede in che cosa consista il momento spaziale di una cosa subito il pensiero corre alla sua superficie, e dunque ai suoi contorni. La cosa è la cosa materiale che ha forma, grandezza (volume), attributi specificamente materiali, determinazioni qualitative di vario genere (colore, sapore, ecc.). La cosa la si può vedere, toccare, modificare, manipolare, e qualche volta persino mangiare.

- La cosa può occupare un luogo, ma il luogo è qualcosa di assai diverso dalla cosa. Esso ha bisogno di essere determinato. Ad esempio, in un gioco contrassegniamo un luogo facendo un cerchio sul terreno. Quel cerchio è un contrassegno del luogo, ma anche *fa sorgere* il luogo. Prima il luogo non c’era. Eppure i luoghi sono da sempre nello spazio. Ma in che modo?

– Immagina che non vi siano cose: in che modo potrebbe esservi *percezione dello spazio*? La spazialità è afferrata attraverso le cose, la percezione delle cose funge da *sostegno* alla percezione dello spazio. Ciò è importante anche per la rappresentazione (raffigurazione) della spazialità. Lo spazio non può essere raffigurato senza le cose. Lo spazio è una non-cosa, come l'acqua o l'aria (gli elementi in cui nuotano le cose). Ma sono le cose che *prospettano* lo spazio.

– Non è un caso che in Euclide non vi sia alcun tentativo di definire o caratterizzare lo spazio e che la prima definizione la si incontri solo in Leibniz. "...vale la pena di ricordare che nella *Analysis situs* per la prima volta troviamo definizioni e teoremi il cui oggetto è lo spazio in generale. Ora, questa è una innovazione davvero notevole, perché nessuna definizione dello spazio può essere trovata nel lavoro di Euclide o, in linea generale, in ogni trattato geometrico prima dei tempi moderni" (De Risi, 2007, p. 129).

– La geometria *non si presenta* senz'altro come scienza dello *spazio*, ma anzitutto come scienza delle *forme*, cioè di linee che si chiudono realizzando in questo modo delle "figure" che hanno determinate relazioni interne. Il pensiero dello spazio non è affatto in primo piano, ma esso resta solo sullo sfondo, sostanzialmente non tematizzato. Di conseguenza la forma non appare da subito come un "ritaglio" dello spazio, come forse poteva essere suggerito dalla riflessione platonica nel *Timeo*, non ha il carattere di *parte* rispetto ad una totalità pensabile come infinita, ma è invece considerata in se stessa come determinata dalla linea che la pone in essere, dunque soprattutto come "perimetro" e superficie in esso racchiusa. Ma questo è un tratto che si richiama all'esperienza della *forma* nella quale lo spazio si costituisce sulla base dei *corpi* che hanno in esso un *luogo*. Il corpo nella sua fisicità, la cosa tangibile e percepibile è il protagonista che sta sul

proscenio mentre lo spazio è anzitutto scenario e fondale.

– La forma-figura si impone da subito nell’esperienza pratico-percettiva della realtà in stretta inerenza alla corporeità fisica delle cose. Naturalmente in questo inizio si innestano le “ideazioni” ovvero le procedure astraenti del pensiero che sono anzitutto procedure isolanti. Non solo il corpo viene isolato dallo spazio, ma la forma del corpo dal corpo stesso, così da proporre la forma come un’oggettività esistente in se stessa, che può essere indagata e conosciuta come tale e di cui possiamo enunciare proprietà e relazioni notevoli.

– Quando parlo di un quadrato e lo disegno, mi occupo esattamente di esso e non dello spazio intorno. In rapporto ad Euclide non possiamo ancora veramente dire che il tema della geometria sia lo spazio, ma piuttosto la forma intesa come *figura*.

– Forse è possibile considerare le forme in se stesse, indipendentemente dal riferimento allo spazio? Non si fa forse così nell’insegnamento elementare della geometria? Non mi è chiaro se debbo caratterizzare la geometria come scienza della forma-figura o scienza dello spazio. Non mi è chiaro come l’una nozione sia connessa con l’altra.

– Se nella geometria si cominciasse dalle coordinate cartesiane sarebbe subito chiaro che la geometria si occupa dello spazio? Forse sì. Perché l’origine degli assi è concepito come centro di *tutto* lo spazio. Ma in realtà proprio a questo punto l’essenziale del geometrico-spaziale tende a dissolversi in una struttura relazionale-funzionale.

La figura e l’estensione

– La forma è da un lato connessa alla cosa, dall’altra all’elemento

spaziale. Ma che cosa significa elemento spaziale? “Questa cosa ha una forma cilindrica”. La forma richiama la nozione della cosa, rammenta i suoi contorni. Ma non senz’altro l’“estensione”: in sé l’espressione *res extensa* è alquanto misteriosa. Forse intende significare che la cosa partecipa dell’estensione. Ed allora è l’estensione che diventa misteriosa.

– *Un triangolo disegnato su una sfera lo chiameresti ancora triangolo? Potremmo rispondere “sì!” – oppure: “assolutamente no!”.*

– Supponi, dopo aver insegnato elementi di geometria piana, di invitare gli allievi a disegnare un triangolo – ma sui loro banchi è stata fatta deporre una semisfera. Alcuni diranno: *su una superficie sferica non è possibile disegnare nessun triangolo. Ed altri invece: una figura triangolare disegnata su una sfera la potremmo ancora chiamare triangolo. Ad esempio triangolo sferico o qualcosa di simile.*

– Possiamo usare uno stesso nome in giochi linguistici differenti, ma dobbiamo essere consapevoli che la differenza del gioco, ne cambia il senso. Nello stesso tempo rientra nel novero delle possibilità interessanti il fatto che si possano stabilire nessi tra giochi linguistici differenti proprio per il fatto che si è deciso di usare lo stesso nome.

– La spazialità è stata talvolta indicata dai filosofi come intrinsecamente statica, come un vero e proprio simbolo della staticità, in virtù di un’astratta contrapposizione tra tempo e spazio. Ed invece le cose stanno ben diversamente: la forma, *non appena la guardi, subito si muove, oppure ti tenta a muoverla.* Essa è-così in un poter-essere-altrimenti che stimola alla variazione ed alla trasformazione. Essa è quella che è, ma nello stesso tempo possiamo dire che è *nel modo in cui viene generata.*

– Suddividere uno spazio. Tracciare delle linee. Debbo realiz-

zare una piantina per un alloggio. Ho suddiviso lo spazio, ho dato ad esso una articolazione. Ogni *parte* dello spazio ha ora una determinata *forma*. Posso dire che una forma è *ritagliata* nello spazio?

– Pensando al concetto concreto di luogo, sarebbe giusto dire non tanto che i luoghi sono punti dello spazio, quanto che i luoghi punteggiano lo spazio. Tra l'uno e l'altro luogo ci sono dei tragitti. Pensa ad una carta geografica, ed alle strade che sono segnate in essa e che conducono da una città ad un'altra, da un luogo ad un altro luogo. Concepito in questo modo lo spazio è qualcosa di simile ad una rete.

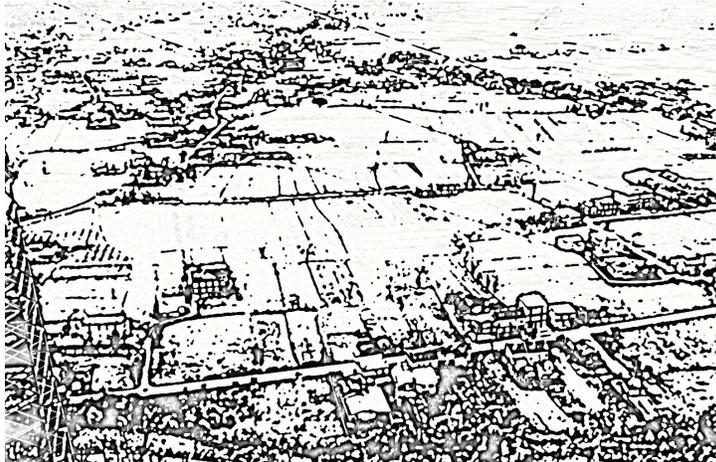
– Nell'espressione *res extensa* vi è una ambiguità di principio. Da un lato essa guarda alla cosa, e dunque al corpo e al luogo, dall'altro alla forma come ritaglio dell'estensione.

– Si potrebbe forse definire lo spazio-estensione, in quanto spazio suddiviso, come una *ragnatela di linee*.

– Una simile definizione la illustrerei così: da una fotografia, eliminiamo le differenze chiaroscurali che forniscono indicazioni sulla tridimensionalità e stabiliscono così le distinzioni percettive tra le cose:



Otterremo allora una figura come questa: una ragnatela di linee.



Assume qui un ruolo fondamentale il punto di vista dell'*intero* e della *parte*. Lo spazio è l'intero che appare ora variamente articolato in parti. Non ci sono nemmeno propriamente dei luoghi. In questo modo si mostra anche come la nozione di forma si trovi all'interno della nozione di spazialità.

– Alla forma posso arrivare per così dire dall'alto, a partire dallo spazio-estensione, dalla sua partizione e articolazione interna, e non necessariamente a partire dalla cosa e dai suoi contorni. E nemmeno dunque dal luogo.

– Dal disegno sono scomparsi non solo i contorni delle cose, ma anche il “vuoto” tra una cosa e l'altra. Prima guardi la fotografia e poi il disegno. Nel disegno non sai più distinguere quale era il pieno e quale il vuoto. Forse potremmo dire che nella geometria il vuoto non c'è (e nemmeno il pieno).

Lo spazio e l'aperto

– All'area dei significati della spazialità appartiene indubbiamente l'opposizione dentro-fuori. *Dentro* si dice in particolare in rapporto alle cose: dentro un cassetto o un armadio. Una cosa può stare dentro l'altra. Non per questo posso dire che quest'altra è

fuori di essa. Ad esempio una penna sta nel cassetto, ma non ha affatto senso dire che il cassetto è fuori dalla penna.

– Il luogo deve essere determinato. In questo senso è chiuso e inoltre può essere circondato da alte pareti. Esse mi impediscono di andare oltre. Di qui posso uscire soltanto se vi è una *apertura*.

– Il movimento non è solo spostamento da luogo a luogo. Altrimenti non vi sarebbe l'entrare e l'uscire. Queste non sono espressioni puramente relative, come se si trattasse di passare da un luogo all'altro. Esco da una stanza ed entro in un'altra. Sulla soglia mi fermo e mi chiedo: sto uscendo o sto entrando? Mi muovo in interni. Ma infine tutto poggia su una contrapposizione assoluta. *Non si entra all'aperto*. Non posso assimilare l'aperto ad una grande scatola. La più grande di tutte. Lo *spazio* è “spazio a cielo aperto”. La relazione tra lo spazio e il cielo, in Aristotele, ha anche questo senso. Lo spazio è l'aperto.

– Nell'elaborazione immaginativa dello spazio si trova il labirinto. Il labirinto è una riflessione sull'essere-dentro resa più complessa e ricca di senso dalla confusione tra i tragitti. Nel labirinto accade qualcosa di simile ad un'esperienza dello spazio ad occhi chiusi.

– Si può comprendere che lo spazio non articolato e non suddiviso, lo spazio privo di centro, possa essere considerato come l'opposto dell'ordine, come caos. In esso non ci sono direzioni. Non è possibile alcun orientamento.

Ideazioni

– “Ma perché mai di due rette parallele si dice, come possibile definizione, che esse sono convergenti all'infinito, ovvero che esse si incontrano in un punto disposto all'infinito? Questo mi è

stato insegnato a scuola, ma senza troppe spiegazioni”.

– “Ora te lo spiego: andiamo insieme su un binario ferroviario, ci mettiamo tra le due rotaie e come vedi esse *appaiono* convergenti, per un noto effetto prospettico. Di qui...”

– Avverto laggiù, nel fondo della sala, un sorriso di compatimento per il filosofo che si arrangia come può di fronte ad un pensiero astratto che lo mette a disagio. Ed invece sei proprio tu, là in fondo, che dovresti sentirti a disagio, perché ignori che l’origine da cui sorge quella dizione definitoria è proprio questa: «In una lettera a Desargues, Cartesio approvò l’idea di considerare un fascio di rette parallele come un caso particolare di un sistema di rette concorrenti in un unico punto. Se le rette sono parallele non c’è dubbio che è loro attribuibile una proprietà comune, che potrebbe definirsi senza ambiguità come la loro ‘direzione’. Ma questa ‘direzione’ può anche chiamarsi ‘punto all’infinito’ per chi contempi la fuga prospettica delle rette parallele che si allontanano indefinitamente in uno sfondo immaginario o reale. L’idea di chiamare con il nome di punto una direzione venne a Desargues proprio dalle ricerche sulla prospettiva: il raggio visuale che segue la comune direzione delle rette tende a fissarsi in un punto limite ‘all’infinito’ che appare l’ideale punto di incontro delle linee rette» (Zellini, p. 147)

– Il rimando alla storia reale, ma anche ad una “storia possibile” dei concetti, così come i richiami ad esperienze concrete che possono essere correlate ad essi servono talvolta a *comprendere* il concetto più a fondo. Ma vi è anche chi del *non comprendere* se ne fa un vanto.

– Parlo di “storia possibile” perché talora non possiamo contare su documenti effettivi, in cui si dimostra che le cose sono andate proprio così, ma riflettendo sul concetto possiamo *immaginare* il

cammino che è stato percorso per pervenire ad esso.

- Nel cerchio euclideo sopravvive il compasso, beninteso un compasso implicito ed oltretutto, come i cerchi che esso “può” tracciare, un “compasso ideale”: eppure qualche volta questo compasso sembra, in una sorta di platonismo a rovescio, essere una copia impallidita di un compasso reale, con le sue punte acuminatae, nelle mani del geometra pratico.

- Nei processi di idealizzazione, tutto assume una particolare mobilità. Ben poche cose si possono considerare già decise. Non è deciso nemmeno esattamente da dove questi processi prendano le mosse. Puntando su leve diverse essi potrebbero procedere secondo vie diverse. Da un lato essi sono processi di *allontanamento* dal mondo di esperienza – e non c’è scritto da nessuna parte quanto lontano ci possiamo spingere, con quali mezzi, in che modo e con quali risultati. Dall’altro, non è scritto da nessuna parte che nel viaggio avventuroso che stiamo per affrontare non possiamo portare con noi i nostri ricordi, e che non convenga ogni tanto a questo mondo fare ritorno. L’unica cosa certa è forse la tortuosità del cammino.

- Proprio perché prende le mosse da forme colte percettivamente o concretamente realizzate, la geometria resta esposta ad un possibile equivoco attinente alla natura dei suoi oggetti – come se essi fossero esattamente quelli che possono stare alla nostra presenza. L’esigenza di contrastare questo equivoco fa indubbiamente parte delle motivazioni più profonde della teoria platonica delle idee. Essa non trae tanto ispirazione dalla idealità delle forme geometriche, come se questa idealità fosse un’ovvietà già ampiamente riconosciuta, ma al contrario se ne fa sostenitrice nel quadro di una teoria generale di ogni possibile conoscenza obbiettiva.

Spazio geometrico e spazio del mondo

– In via di principio lo spazio di cui si parla nella geometria deve essere tenuto ben distinto dallo spazio del mondo. Come sia fatto lo spazio del mondo (che non è da confondere con lo spazio circostante) è un problema fisico, e non geometrico anche se ovviamente su questo problema la fisica si appoggerà ampiamente sulla geometria. La distinzione è a portata di mano, e lo scivolamento inavvertito dall'uno all'altro, anche. E questo scivolamento non può fare altro che confondere le idee.

– La differenza tra un punto di vista geometrico-matematico e un punto di vista fisico non sta nella quantità di teoria che sta nell'uno e nell'altro ma nel fatto che nel primo caso ci possiamo allontanare a piacere dal reale, nel secondo dobbiamo tentare di approssimarci ad esso – rendere la distanza sempre più piccola. Ma che cosa significa questa approssimazione se non il fatto che la teoria dello spazio fisico deve consentirci applicazioni tecnologiche sempre più ampie, efficienti e precise?

– La geometria non si occupa dello spazio del mondo. La geometria *elabora il pensiero* dello spazio.

– Se siamo in presenza essenzialmente di una costruzione del pensiero, e non ad una presentazione delle strutture metafisico-ontologiche o trascendentali del reale, allora solo il pensiero stesso potrà mettere limiti oppure toglierli, ed in questo senso potrà anche avvalersi dell'atto creativo del far valere questo postulato o quest'altro. *Ma deve comunque avere sempre delle buone ragioni.*

Lobachevsky

– In rapporto alle geometrie non euclidee, vi è la tendenza, non

solo nelle esposizioni divulgative, a falsare la vera storia di questa straordinaria vicenda intellettuale, o almeno a tacere aspetti importanti di questa storia. Ad esempio, nel caso di Lobachevsky viene normalmente taciuto il fatto che alla base della sua concezione vi è una concezione antiplatonistica ed empiristica della geometria. Questo aspetto viene invece chiaramente sottolineato da L. Lombardo Radice nel suo saggio introduttivo alla traduzione italiana dei *Nuovi principi della geometria* (Lobachevsky, 1965).

– Si può dire intanto, in linea generale, che la scoperta delle geometrie non euclidee mette in questione il rapporto tra spazio geometrico e spazio del mondo, rappresentando una sorta di conferma del fatto che proprio il modo in cui ora si propone questo rapporto non consente di mettere un accento troppo forte sull'apriorità della geometria. Questa conferma induce semmai ad accentuare l'elemento empirico, a cominciare da Gauss fino a Riemann.

– Così scrive in proposito Donald Gillies: «È certamente ovvio che la scoperta della geometria non euclidea ebbe profonde conseguenze filosofiche. Prima di questa scoperta si pensava che la geometria euclidea fosse la sola possibile geometria, ed *a fortiori* la vera geometria dello spazio. Tutti i suoi teoremi avrebbero potuto essere dedotti da pochi assiomi generalmente ritenuti essere autoevidenti. Cosicché la geometria euclidea poteva apparire come una conoscenza del mondo acquisibile *a priori* e la visione di Kant di essa come sintetica *a priori* doveva sembrare particolarmente ragionevole. Tuttavia non appena si riconobbe che era possibile un'alternativa non euclidea, si presentava da sé la questione se, dopo tutto, la geometria dello spazio non avrebbe potuto essere non euclidea piuttosto che euclidea. Si trattava di una questione a cui si poteva manifestamente rispondere solo attraverso l'osservazione e la misurazione, facendo fornendo così alla geometria delle fondamenta empiriche piuttosto che *a priori*.

Così in una lettera a Olbert, Gauss osservava che la geometria non avrebbe dovuto essere posta nella stessa classe dell'aritmetica 'che è puramente a priori, ma piuttosto con la meccanica'» (Gillies, 1999 p. 174). Nell'ambito del problema di una concezione empiristica della geometria Gillies fa riferimenti significativi, oltre che a Riemann, anche a Helmholtz e a Erdmann.

– In ogni caso fin dalle prime pagine del volume di Lobacevsky risulta quanto sia fuorviante un modo comune di ambientare dal punto di vista epistemologico la problematica delle geometrie non-euclidee. Si tende infatti a presentare questa problematica come essa fosse una sorta di puro e semplice trionfo del pensiero astratto, del pensiero puro, in generale del pensiero logicamente purificato di fronte alle seduzioni di un pensiero inquinato da elementi empirici, psicologici, intuitivi. “Crisi dell'intuizione” e geometrie non-euclidee sembrano a molti essere titoli che stanno l'uno dentro l'altro. Allora è il caso di riflettere sul modo in cui Lobacevsky vincola i concetti geometrici elementari all'esperienza sensibile.

– Il punto che dovrebbe essere subito sottolineato nel caso di Lobacevsky è probabilmente il fatto, che proprio alla presenza di una svolta cruciale nei modelli del pensiero geometrico, si senta il bisogno di una “nuova fondazione” dei concetti primi della geometria stessa. E non appena ci addentriamo anche di poco nel testo ci rendiamo conto, non senza una qualche meraviglia, se siamo abituati alle esposizioni scolastiche, che questa nuova fondazione viene ricercata in un vero e proprio *ritorno all'esperienza*.

– In questo ritorno non si cerca di dare da subito un ordine formale all'esposizione, di formulare con qualche precisione definizioni, per non dire di dare forma assiomatica all'esposizione. In certo modo potremmo azzardarci ad affermare che, per andare oltre Euclide, Lobacevsky fa in certo senso, *dal punto di*

vista metodico, un passo indietro rispetto ad Euclide. Ad es. egli non enuncia definizioni concettuali, come Euclide aveva pur tentato di fare. Il passo avanti di Lobacevsky è condizionato da un “regresso” rispetto al livello assiomatico in cui Euclide è già attestato. Lobacevsky non è per nulla preoccupato da una esposizione assiomatica, né si sente impacciato da problemi definitivi. Ciò che egli vuol fare è un’introduzione dei “primi concetti della geometria” richiamandosi all’esperienza dello spazio, anzi — dobbiamo dire più precisamente — all’esperienza della *cosa materiale* ovvero di ciò che egli chiama propriamente “corpo della natura”, che tuttavia non è da subito la cosa “fisicalizzata”, cioè già all’interno di una teoria fisica matura, ma la cosa direttamente presente alla percezione comune.

– E non sono le forme-figure (i contorni) che egli prende anzitutto in considerazione, ma i corpi stessi e la loro possibilità da un lato di entrare in *contatto* tra loro, dall’altro di poter essere *suddivisi*. «Il contatto costituisce l’attributo caratteristico dei corpi – egli dice – ; ad esso i corpi debbono il nome di corpi geometrici, non appena noi teniamo fissa l’attenzione su questa loro proprietà, e non consideriamo invece tutte le altre proprietà, siano essenziali o accidentali» (ivi, p. 73) (Pensa a ciò che avrebbe detto Frege di una simile teoria dell’astrazione).

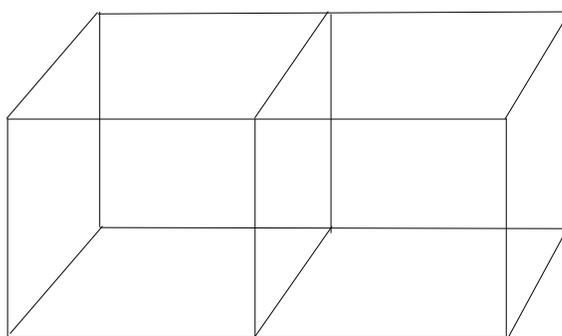
– Le cose possono entrare in contatto tra loro, si possono toccare, il lato di una cosa può aderire al lato di un’altra. Ma per quanto io possa usare dei sinonimi o delle perifrasi, il senso in cui deve essere intesa questa parola di “contatto” io debbo già conoscerlo. E in che modo posso conoscere questo senso se non nel rapporto diretto che ho con le cose e con l’esperienza delle cose? Alla domanda intorno al senso in cui deve essere intesa questa parola in effetti si risponde che la nozione di contatto «la abbiamo ricevuto dalla natura attraverso i sensi, non deriva da altri concetti, e non soggiace perciò a ulteriori spiegazioni»

(ivi). Ciò è quanto dire: come sappiamo che una cosa è una cosa materiale, così sappiamo anche che cosa significa contatto tra le cose materiali.

– Contatto, diremmo noi, significa ciò che questa parola significa *di solito*. Io, Lobacevsky che sono un raffinato geometra e matematico, e che sono fra i primi a proporre una geometria non-euclidea, uso la parola *contatto* esattamente nel modo in cui la useresti tu, che sei un uomo qualunque, incolto nella mia scienza.

– Lo stesso vale per la nozione di *sezione* – ovvero per il tema della suddivisione di un corpo. *Secare* in latino significa *tagliare*, e Lobacevsky non si vergogna per nulla di intendere *il taglio in modo assai concreto*. «Ogni corpo viene scomposto da una qualsivoglia sezione S in due parti A e B. Intendiamo qui con la parola *sezione* non già un qualche nuovo attributo del corpo, *ma ancora una volta il contatto* in quanto esprimiamo in questo caso la scomposizione del corpo in due parti che si toccano» (p. 73).

– La nozione di *sezione* è dunque un contraltare di quella di *contatto*. La figura seguente le illustra entrambe:



Questa figura può essere vista come due parallelepipedi in contatto attraverso una faccia oppure come un intero suddiviso in due parti.

– Corpo, contatto, sezione. Poi tutto il resto verrà. Ma intanto cominciamo intravedere un altro modo di *pensare* lo spazio. L'introduzione di questo concetto ci può apparire inizialmente enigmatica: «In questo modo noi possiamo concepire tutti i corpi nella natura come parti di un unico *corpo globale* che noi chiamiamo spazio» (ivi). Eppure cominciamo già afferrare che seguendo questa via si potranno riproporre i concetti costitutivi dello spazio e cominciamo a scorgere un altro modo di *idearli*.

– Val la pena di leggere come si esprime Lobacevsky per introdurre il concetto di superficie: «Se due corpi A e B si toccano superficialmente in quanto si trovano dai due lati della sezione S, essi riceveranno d'ora innanzi il nome di *superficie S*, non appena è permesso aggiungere o togliere ad A ogni parte *a* che non tocchi B e a B ogni parte *b* che non tocchi A. Il distacco di parti *a* e *b* di questo tipo deve avvenire con l'ausilio di sezioni S' e S'' consecutive rispetto ad S, e può essere proseguito finché in entrambi i corpi *si arrivi alla sottigliezza di un foglio di carta, o fino al punto in cui l'immaginazione è ancora in grado di seguire la suddivisione*. Usualmente ci si rappresenta le superfici in questa forma, e cioè proprio per mezzo dell'estremo assottigliamento di due corpi, rimuovendo dalla nostra attenzione quelle parti in essi che non è necessario prendere in considerazione» (p. 83).

– Questo linguaggio molto concreto si ripresenta anche nel caso della linea laddove si parla di “sottigliezza di un capello”; oppure per il punto che viene assimilato ad un granello di sabbia o ad una punta aguzza. E va forse notato anche che nel passaggio alla superficie, come alla linea ed al punto non sembra esservi nessuna ideazione che presupponga un passaggio infinitario, nessuna idea-limite.

– Nel modo in cui Lobacevsky illustra la sua definizione dello spazio, rimango colpito dal fatto che riesca a riunire in una sin-

tesi la concezione platonica con quella aristotelica, almeno nel senso in cui io le ho intese.

Aristotele: «Sarebbe del tutto inesatto affermare che Aristotele non ci offre una teoria dello spazio, ma una teoria del luogo: è certo invece che ciò che viene proposto è una *teoria dello spazio attraverso una teoria del luogo*. Ma di questa circostanza occorre afferrare le ragioni nelle loro implicazioni più profonde. Il problema dello spazio si presenta fin dall'inizio come inseparabile da quello della materia, cosicché l'una teoria deve svilupparsi dentro l'altra: *una teoria dello spazio dentro una teoria della materia*. E a sua volta questa connessione viene considerata alla luce di una nozione di realtà che ha il suo primo modello nella concretezza della cosa materiale, del corpo che c'è nella sua individualità e determinatezza. Di conseguenza la nozione fondamentale di una teoria dello spazio diventa proprio quella di *luogo*» (Piana, 1988, ed. Lulu, p. 122).

Platone: «L'essenziale viene colto non già osservando la cosa, ma badando alle condizioni della sua concezione, a quei caratteri che, in base ad esse, sono possibili o impossibili. Per esempio, non può esserci corpo senza tridimensionalità. E nemmeno tridimensionalità senza il piano. Il piano poi lo puoi in ogni caso suddividere in superfici di forma triangolare. In proposizioni come queste si manifesta il passaggio a una vera e propria nuova modalità del pensiero che distoglie lo sguardo dalla precarietà del dettaglio, per badare invece alle regole interne che sono costitutive della *forma* come tale. La corporeità da cui si prende l'avvio sembra alla fine interamente trascesa, e proprio in direzione della sua risoluzione in una spazialità che certo non potrà più essere descritta come un informe impasto materico. Le prime materie ci appaiono ora, nella varietà dei loro modi di apparire, come manifestazioni di un'essenza cristallina: in esse e al di là di esse noi intravediamo i profili dei 'quattro bellissimi corpi', le meravigliose consonanze dei solidi regolari alla cui costruzione il

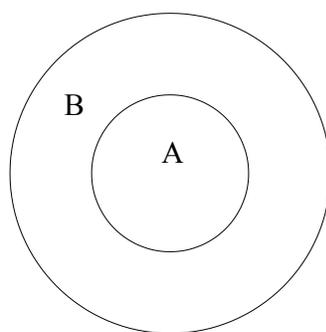
triangolo fa da fondamento. Lo stupore della forma sopravanza così il mito della materia» (ivi, p. 129).

– Il tema della forma, concepito in questo modo, punta in direzione di una concettualizzazione dello spazio profondamente differente da quella aristotelica, e precisamente prospetta l'idea di uno spazio che pone le forme non più relativamente a corpi e dunque a luoghi, ma come risultati della sua suddivisione (cfr. ivi, p. 166).

– In fin dei conti, in Aristotele abbiamo un'idea di spazio che potremmo caratterizzare come spazio–materia oppure, forse meglio, come spazio-luogo rammentando il rapporto tra corpo e luogo, in Platone un'idea di spazio che potremmo caratterizzare come spazio-estensione. Nel primo caso le nozioni “originarie” sono quelle di corpo e luogo, nel secondo quella di forma intesa come parte di un intero che può essere suddiviso.

– Ora Lobacevsky prende indubbiamente le mosse dal *corpo*, ed anzi questa nozione entra nella definizione che egli propone dello spazio, che è assai inusuale e apparentemente molto lontana dell'esperienza quotidiana della spazialità. Nello stesso tempo in essa si fa avanti l'idea di una totalità suddivisa perché i corpi sono detti senz'altro *parti dello spazio*. Il riferimento al corpo ci fa sospettare un punto di partenza aristotelico, mentre il tema della suddivisione ad una direzione platonica. In realtà, a mio avviso, Lobacevsky mostra come le due vie possano confluire l'una nell'altra. E lo fa attraverso la nozione di contatto e quella di sezione.

– In due parole: vi è una tipologia del contatto che è rappresentata da corpi che si trovano l'uno dentro l'altro. Lo stesso Lobacevsky propone la seguente immagine illustrativa da intendere come rappresentativa di un corpo sferico dentro un altro corpo sferico:



Qui si ripresenta il rapporto tra contenente e contenuto così importante per la concezione aristotelica dello spazio. Ma il corpo B viene chiamato da Lobacevsky *spazio circostante* di A. B potrà a sua volta essere contenuto in un corpo C che sarà il suo spazio circostante, e così C in una iterazione illimitata. Vi sono poi altre due possibilità interessanti: B può contrarsi fino a “coincidere” con A, senza identificarsi *concettualmente* con esso: in tal caso esso verrà chiamato “luogo” di A. Inversamente può espandersi indefinitamente a partire da A, ed in tal caso saremo in presenza dello *spazio*, concepito appunto come “corpo globale di cui tutti i corpi sono *parti*”.

– È difficile non intravedere qui il farsi avanti dell’idea dello spazio-estensione. Questa direzione è accentuata dall’altra possibile tipologia del contatto che è rappresentata dal contatto di due corpi attraverso uno dei loro lati, secondo l’introduzione proposta da Lobacevsky del concetto di superficie e illustrata, come abbiamo mostrato in precedenza, dalla figura dall’accostamento di due parallelepipedi che può anche essere intesa come illustrazione di un *intero* che può essere suddiviso in *parti*.

– A me sembra che, anche solo sulla base di queste poche indicazioni, si possa giustificare l’affermazione che nell’esposizione di Lobacevsky il tema del *corpo* scivoli coerentemente in quella del *solido*, nel senso geometrico del termine, e che dunque si possa cogliere in essa un modo singolare di far confluire l’uno

nell'altro l'itinerario aristotelico con quello platonico.

Ordo rerum

– «Lo spazio è un ordine delle coesistenze» (Leibniz, 1963, p. 400). O ancora più semplicemente: *ordo rerum*. «... tempus non est nisi ordo rerum, non aliquid absolutum. Atque idem de spatio censeo» (Leibniz, 1875, vol. II, p. 510 – Lettera a Des Bosses).

– Così Leibniz: e con ciò si annuncia un modo interamente nuovo di approccio al tema dello spazio. Egli spiega poi più ampiamente: «Lo spazio contrassegna in termini di possibilità l'ordine di quelle cose che esistono nello stesso tempo, in quanto esse esistono insieme, senza entrare nei loro modi di esistere particolari» (1963, p. 400) .

– Nella definizione seguente: «Extensio mihi nihil aliud esse videtur, quam continuus ordo coexistendi, ut tempus continuus ordo existendi successive» si aggiunge un importante riferimento alla continuità (Leibniz, 1875, vol. II, p. 221 – Lettera a de Volder).

– Potremmo forse dire che la caratterizzazione di Leibniz è una sorta di esplicitazione, o meglio, di interpretazione dell'essere in un luogo, quindi dello spazio come insieme di luoghi, ma secondo un orientamento assai lontano dall'immagine aristotelica dell'anfora, e dunque del rapporto tra contenente e contenuto.

– «Ecco come gli uomini giungono a formarsi il concetto dello spazio. Essi considerano che più cose esistono insieme, e trovano tra esse un ordine di coesistenza, secondo cui il rapporto delle une e delle altre è più o meno semplice: è la loro situazione (*situation*) o distanza (*distance*)» (1963, p. 441– 442; 1875, vol. VII, p. 400).

– La terminologia è qui oscillante, forse un poco equivoca. *Situation* rimanda ad un contesto, mentre *distance* fa subito pensare alla possibilità della misurazione. In ogni caso, l'essenza del luogo e dell'essere in un luogo dobbiamo cercarla nell'idea del trovarsi in una determinata relazione con altri luoghi. Potremmo dire che alla domanda sul “dove” non si risponde con un “essere in”, ma con un “essere tra”. Di conseguenza un contesto relazionale deve essere sempre presupposto.

– La tal cosa è *là*: la determinazione del luogo attraverso questo *là*, può certamente essere risolta in determinazioni relazionali – ad es. potrei rendere chiaro che dicendo *là* intendevo indicare la cosa che si trova tra il tavolo e la poltrona di questa stanza. Il mio interlocutore non ha compreso chiaramente il gesto che accompagnava il mio “là” – e così ho fornito un'ulteriore spiegazione. Se così stessero le cose la determinazione relazionale sarebbe una sorta di analisi dell'espressione *là*, ed in tal caso si ammetterebbe implicitamente che lo spazio sia *precostituito* nella totalità dei suoi luoghi: le cose vanno ad occupare questi luoghi ed entrano *perciò* in varie relazioni tra loro. Ma non è così che intende la questione Leibniz.

Cose, relazioni, luoghi

– Forse potremmo dire che la nozione di *relazione* precede quella della *cosa*. O forse “precede” è un'espressione troppo forte. È certo in ogni caso che per Leibniz deve essere posta una netta differenza tra l'una nozione e l'altra. La relazione non deve essere “cosificata”. Conseguentemente il luogo o il *situs*, come Leibniz si esprime, deve poggiare essenzialmente non sulla nozione della cosa ma su quella di *relazione*. Il punto su una retta o su una superficie illustra questa concezione in quanto da un lato è privo di qualità (i “modi di esistere particolari”) che lo contraddistin-

guono da altri punti e dall'altro un punto su una retta o una superficie non può che coesistere con altri punti. Indirettamente in questa illustrazione si intravede anche la possibilità di introdurre il tema della continuità.

– *Situs* viene spesso tradotto con *situazione* e quanti problemi scateni questa parola e quante discussioni si possano svolgere in rapporto a questa vera e propria svolta nella problematica teorico–filosofica dello spazio lo si può ben comprendere nel monumentale volume di Vincenzo De Risi, *Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space* (De Risi, 2007), che riguarda sia le conseguenze che la concezione leibniziana ha sul piano del pensiero geometrico sia la connessione che vi è – assai profonda – tra la filosofia leibniziana dello spazio e la sua monadologia (un problema ben poco considerato dalla bibliografia anteriore). Entrambi gli aspetti sono trattati non solo con profonda penetrazione storico–filologica, ma anche con una rara sensibilità teoretica al punto da rendere quest'opera un vero e proprio modello di storiografia filosofica.

– Indicativa è anche la notazione che talora propone Leibniz, contrassegnando il *situs* con un punto: ad esempio “A.B”. Secondo questa notazione, il punto *tra* A e B caratterizza il *situs*.

Ma né il punto tra le lettere né i punti di una linea vanno intesi come rinvianti ad una spazialità oggettivamente precostituita: la novità essenziale è la riconduzione dei luoghi ad un sistema di relazioni. Ed in fondo anche il riferimento alle *cose* potrebbe essere considerato inappropriato. In effetti, nelle lettere a Clarke, Leibniz parla dello spazio non solo come *ordo rerum* ma anche come *ordre des situations*. «Dunque, io non dico che lo spazio sia un ordine od una situazione, ma un ordine delle situazioni, secondo quale, cioè, le situazioni sono disposte; e che lo spazio astratto è lo stesso ordine delle situazioni, concepite come possibili» (1963, p. 461 – 1975, vol. VII, p. 415).

– Potremmo azzardarci a dire che, essendo la cosa portatrice del concetto della *realtà* stessa e la relazione non va intesa come una cosa o una sua proprietà, lo spazio risolto in puri nessi relazionali deve essere proposto come qualcosa di *ideale*. Anche se non può essere troppo facile comprendere come questa idealità debba essere intesa. Probabilmente deve valere qui ciò che vale, secondo Leibniz, per tutte le relazioni: esse non sono reali, nel senso che sono semplicemente *pensate*. «Per Leibniz la realtà è composta di sole sostanze individuali: al di fuori dei singoli esistenti non si può dire che esista qualcosa di ‘reale’ che si possa denominare relazione» (Mugnai, 1976, p. 144).

– Un’efficace immagine proposta da Leibniz nelle lettere a Clarke ci porta al centro della questione. Se vuoi comprendere che cosa io intenda con luogo e con spazio pensa ad un albero genealogico. Di esso possiamo proporre uno schema che ha lo scopo di illustrare i rapporti. Tenendo conto di esso potremmo interrogarci sul posto che occupa in esso un determinato individuo A. La risposta avrà la forma: A è figlio di B, fratello di C, nipote di D, padre di E, ecc. Ed un’analoga sequenza di determinazioni relazionali sarebbe la risposta *adeguata* alla domanda del posto che occupa B o chiunque altro. «...la mente può figurarsi un ordine consistente in linee genealogiche, le cui grandezze non rappresentano che il numero delle generazioni, nelle quali ogni persona trova il suo posto» (1963, p. 443 – 1975, vol. VII, p. 401).

– Quest’immagine è accompagnata da una singolare finzione aggiuntiva. Potremmo ammettere che sia vera la metempsirosi, cosicché l’analogia viene estesa non solo alla posizione ma anche al mutamento di posizione: «Se si aggiungesse la finzione della metempsirosi, con cui si fanno tornare le stesse anime umane, le persone potrebbero cambiarsi di posto: chi è stato padre o nonno può diventare figlio o nipote...» (ivi).

– Questa integrazione illustrativa pretende di rendere conto del *movimento*. E porta subito con sé la questione della direzione in cui è rivolta prevalentemente la caratterizzazione leibniziana: se in direzione dello spazio fisico o dello spazio geometrico o addirittura di una “formalizzazione” completa del concetto. Va da sé che Leibniz riporta la propria caratterizzazione di spazio in tutti questi ambiti traendo da essa le possibili conseguenze e reinterpretandola secondo l’ambito considerato. Ne deriva una elaborazione ricchissima di implicazioni.

Geometria e analysis situs

– La concezione relazionale dello spazio è rilevante anzitutto sul piano specifico del pensiero geometrico, ed il progetto leibniziano di un rinnovamento di esso sotto il titolo di *Analysis situs* si integra nel fervore delle innovazioni e scoperte che caratterizzano la sua epoca, a partire dalla tematica dell’algebraizzazione cartesiana ed ai suoi sviluppi, a quella della geometria proiettiva, ai problemi indotti dalla riflessione sul calcolo infinitesimale (cfr. De Risi, 2007, pp. 5 sgg.). Questo progetto ha al suo centro l’idea, in fin dei conti controcorrente e che rappresenta il tratto di forte originalità di Leibniz, del carattere *fondazionale* della geometria: «In effetti, Leibniz pensa anche di poter fondare l’algebra sulla geometria, e non inversamente, in quanto quest’ultima gli sembra molto più originaria della prima. Cosicché, il fondamento della geometria che egli ha tentato attraverso la sua *analysis situs* sarà anche una fondazione dei metodi algebrici» (De Risi, 2007, p. 8, n. 8).

– Un simile orientamento nel considerare il rapporto tra algebra e geometria sottintende un’intenzione di mantenere la presa sul piano dell’esperienza sensibile, ma questa intenzione convive in Leibniz con la sua *forma mentis* fortemente logicizzante, cosicché l’idea dell’*analysis situs* fa anche tutt’uno con il progetto di ripen-

samento delle nozioni fondamentali della geometria alla luce di istanze di formalizzazione e di rigorizzazione. Questo duplice orientamento crea una forte tensione interna al pensiero di Leibniz che permea sia il suo pensiero logico–matematico sia la sua filosofia monadologica, che non abbandona del tutto il terreno “fenomenologico” anche quando si spinge nel modo più audace sul terreno metafisico.

Spazio assoluto

– Si è forse notato troppo poco che lo spazio assoluto di cui Newton parla nello Scolio alle sue definizioni nei suoi *Principi* contiene virtualmente una “cosificazione” dello spazio. Lo rammenta invece Van Fraassen che scrive: «Gli Newtoniani spiegano il loro concetto di spazio dicendo che lo spazio è molto simile ad un corpo materiale, di una specie assai eterea, ma non interamente. La differenza principale è che i corpi sono nello spazio, ma è un nonsenso chiedere dove sia lo spazio – essi non concedono che parti dello spazio siano luoghi di se stessi come di tutte le altre cose» (Van Fraassen, 1992, p. 109).

– Ciò che Newton dice nel famoso Scolio dei suoi *Principi Matematici della Filosofia naturale* lo possiamo già leggere direttamente nella sua formulazione del principio di inerzia: «Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme a meno che non sia costretto a mutare quello stato da una forza che gli è stata impressa».

– Ecco il corpo che passa di fronte a noi nel suo splendido isolamento e nel suo altrettanto splendido moto rettilineo uniforme – splendido per la sua perfetta uniformità, per la perfezione della retta che in qualche modo disegna lasciandone la traccia! Ciò presuppone appunto lo spazio come una grande lavagna nera. La cosa *riga* lo spazio come una punta aguzza – ma allora lo

spazio non è forse prospettato *come una grande cosa immobile?*

—«Noto infine che le tracce che i mobili lasciano talvolta negli immobili sui quali si muovono, hanno dato occasione agli uomini di formarsi quell'idea: come se restasse ancora qualche traccia anche quando non vi è nessun immobile. Ma è una traccia ideale, la quale implica soltanto che, se vi fosse a quel posto un immobile, la si potrebbe disegnare. Questa analogia fa sì che vengano foggiate posti, tracce, spazi, benché tali cose non consistano che nella verità dei rapporti e per niente in una realtà assoluta» (Leibniz, 1963, V, oss. 47 – 1875, vol. VII, p. 402).

– Ciò non significa naturalmente che, assumendo un punto di vista leibniziano, si dovrebbe necessariamente respingere il principio di inerzia: ma che quella formulazione del principio non è compatibile con l'ordine di idee leibniziane. Stando ad esso quiete e movimento non possono essere concepite *rispetto allo spazio*. Invece per Newton la distinzione tra moti relativi e moti assoluti rappresenta un corollario inevitabile. Per illustrare l'idea di moto relativo egli ricorre proprio all'immagine della nave già presente in Aristotele, immagine che sta alla base dell'ultima metamorfosi della definizione aristotelica, il passaggio al contenente *immobile*. Il luogo, se deve essere tale, non può, nonostante tutto essere un vaso, perché il vaso può essere trasportato. E che luogo esso è mai se poi è in grado, esso stesso, di muoversi? Per Newton il moto relativo è un moto da un luogo relativo ad un altro luogo relativo, ed i luoghi relativi sono ad esempio le parti di una nave che si muove lungo un fiume. «Di conseguenza, commenta Newton – se la terra fosse realmente in quiete, il corpo che è in quiete relativa sulla nave si muoverebbe di moto reale ed assoluto sulla terra con la stessa velocità con la quale la nave si muove sulla terra». Ma se la terra a sua volta si muove, allora il corpo in quiete sulla nave si muove *in realtà* secondo un movimento che «si compone del moto vero della terra nello spazio immobile e

del moto relativo della nave sulla terra» (Newton, 1965, p. 105).

– È particolarmente importante mettere in evidenza che la distinzione tra *movimento relativo* e *movimento assoluto* è direttamente connessa con quella tra *apparenza* e *realtà*. Qualcosa che *appare* in quiete può essere *in realtà* in movimento. Spostando l'attenzione in questa direzione si coglie subito che in una simile considerazione ci troviamo su un terreno propriamente *argomentativo*, ovvero all'interno di un dibattito filosofico che nei contesti quotidiani sarebbe del tutto improponibile. La determinazione del luogo, e quindi dello stato di moto o di quiete, si regola normalmente sul riferimento richiesto dal senso del contesto. Nei contesti quotidiani, ogni domanda sulla quiete e sul moto avrà una risposta adeguata al contesto in cui la domanda è stata formulata. Certamente si potrà anche notare che vi è un riferimento ultimo, che è la terra stessa che ha, tra le sue singolari proprietà, anche quella di essere terraferma. La terraferma, per chi va vagando per i mari, è qualcosa di tangibile, fa parte della sua esperienza concreta di vita.

– Invece, una volta che siamo solidamente installati nel gioco linguistico che si muove nei meandri filosofici del *concetto* di spazio, certamente potrebbe porsi come esigenza razionale quella di un riferimento ultimo ed assoluto nella catena delle relatività. Di relatività in relatività debbo pervenire a qualcosa che è assolutamente in quiete altrimenti non saprei affatto che cosa si muove e che cosa no. Ora ci troviamo nel campo della delimitazione razionale dei concetti, delle argomentazioni e delle controargomentazioni eventuali. Di relatività in relatività si giunge infine a porsi il problema dello spazio assoluto come terraferma dell'universo. Qui i pensieri mi si confondono.

– L'idea dello spazio assoluto è un enigma. Da un lato sembra trattarsi di una tesi imposta dalla ragione stessa, che si radica

nella fondamentale esigenza razionale di un criterio del vero e del falso. Si chiede: questa cosa è *davvero* in quiete? Che cosa si muove *davvero*? Dall'altro potrebbe essere considerata come una ipotesi da provare con esperimenti e induzioni di varia natura.

– Vi sono anche aspetti che rendono la tesi dello spazio assoluto come una sorta di punto di congiunzione tra fisica e metafisica. Il problema dello spazio fisico non chiama in causa solo il pianeta terra, il sistema solare, le realtà astronomiche più vicine o più lontane, ma la totalità stessa. E non si tratta beninteso di una totalità *puramente pensata*. Si tratta invece della totalità reale, quindi della totalità in cui stanno tutte le cose, anzi della totalità che ci sarebbe anche se non ci fossero cose.

– La problematica dell'assolutezza, che ha origine nell'esigenza di concettualizzazione inerente anzitutto alla costruzione di una immagine fisica della realtà, si aggancia ai fondamenti metafisici della fisica – il tema dello spazio richiama il tema di dio anzi per molti versi sembra addirittura coincidere con gli enigmi più profondi che portano sull'essenza di dio. In fin dei conti sappiamo dove sono il sole, i pianeti, le stelle più vicine e più lontane, sappiamo ricercarle con i nostri telescopi. *Ma la terra dov'è?* È proprio questo che ci interessa sapere.

– Porsi questa domanda, e porsi in questo modo, significa porre il problema dell'ordine ultimo, dell'ordine dell'universo che rimanda ad un piano che la fisica stessa non basta ad illustrare. Nella religione ebraica uno degli appellativi di dio è semplicemente il Luogo. E Newton deve aver certamente riflettuto su di esso. Molti studiosi hanno messo in rilievo l'importanza di queste motivazioni religiose nella tematica newtoniana dell'assolutezza dello spazio, documentando l'influenza su Newton di autori che fanno parte della tradizione della mistica ebraica. Queste letture, questi insegnamenti, che risalgono agli anni gio-

vanili della formazione di Newton, ebbero un peso rilevante, ed è certamente riduttivo ritenere che questo momento religioso si innesti come una sorta di corpo estraneo sull'impianto scientifico di Newton ed abbia agito da freno rispetto ad esso. In realtà dietro una simile prospettiva di discorso vi è un modo erroneo di concepire i rapporti tra filosofia, scienza e religione, ed anche un modo di rappresentarsi lo sviluppo della scienza e il processo stesso del pensiero.

– Un pensiero autentico è un pensiero che passa attraverso mille vicissitudini, complesse tortuosità, mentre non vi è un pensiero *frenato* vuoi dalla religione vuoi dalla filosofia, come se, senza questi freni, esso andrebbe liberamente a valle seguendo la giusta direzione. Quanto alla religione talora frena, talora stimola, e ora frena e stimola insieme, ed ora frena in una direzione, ora nella direzione opposta.

– Il dibattito tra Leibniz e Clarke sull'alternativa tra spazio assoluto e spazio relazionale è in ogni caso anche un dibattito teologico, morale e metafisico; ed è assai interessante vedere come l'un problema trapassi nell'altro. La ricchezza del dibattito filosofico si manifesta proprio nel fatto di riuscire a stabilire nessi e relazioni, nel mostrare le conseguenze vicine, ma anche quelle più lontane, di una presa di posizione. La discussione sullo spazio non può essere circoscritta – *non può tecnicizzarsi, resta aperta alle più varie digressioni*. Talvolta si può pensare che si parli di tutt'altro. Leibniz attacca insidiosamente Newton avanzando il sospetto che la sua concezione dello spazio finisca con il dare argomenti ai materialisti. La critica si accanisce sull'analogia newtoniana dello spazio come *sensorium dei*. Nell'*Ottica*, Newton spiega che, affinché le cose che ci stanno intorno siano da noi afferrate e conosciute, è necessario non solo che le immagini di esse, le loro "specie" sensibili, siano separatamente percepite attraverso gli organi di senso, ma anche che esse siano riunite

in un *luogo* del nostro cervello, che egli chiama *sensorio* nel quale esse sono unitariamente presenti nella nostra coscienza. Lo spazio infinito in rapporto alla coscienza di dio sarebbe qualcosa di simile a questo sensorio – il che è palesemente un modo di illustrare metaforicamente la stretta unità tra dio e lo spazio, e dunque *per illustrare la sua onnipresenza*. Si tratta di un’immagine che non piace affatto a Leibniz. E non vi è forse qui il rischio che si operi una materializzazione di dio, dal momento che viene assimilato ad un essere vivente che ha bisogno di organi di senso per percepire le cose?

– Clarke a sua volta spiega che si tratta solo di una metafora. Questo paragone – spiega Clarke – significa soltanto che «dio vede tutte le cose con la sua presenza immediata ad esse, essendo attualmente presente alle cose stesse, quante ve ne sono nell’universo, allo stesso modo che l’anima è presente a tutte le immagini che si formano nel cervello» (1963, p. 389). Ed inoltre con *sensorium* non si intende “organo della sensazione”, ma *luogo* della sensazione. Anche i dizionari vengono richiamati per sostenere la disputa – “organum sensationis” scartabella Leibniz nel dizionario di Goclenius; “domicilium animae” contrappone Clarke squadernando il dizionario di Scapula – e che importa poi sapere quel che Goclenius intende con “sensorium”, dal momento che è semmai l’opinione di Newton quella che conta? Ribatte Leibniz: A che servono allora i dizionari? Ed in ogni caso l’espressione “sensorium” è la meno adatta che si sarebbe potuto trovare. Naturalmente la questione non si riduce alla disputa sulla parola. Sono in effetti implicate differenze che riguardano l’orientamento intellettuale generale, e che si fanno valere con argomenti e sottoargomenti che riguardano il modo di concepire la divinità in connessione con l’idea di legge di natura, il determinismo e il libero arbitrio, e persino la possibilità dei miracoli – argomenti che hanno in ogni caso tutti il loro punto di avvio in ipotesi e interpretazioni di ordine fisico.

Generalizzazione

– Forse lo scambio epistolare con Clarke induce a pensare che gli interessi della concezione relazionale dello spazio di Leibniz siano rivolti soprattutto allo spazio fisico reale. In esso ovunque si discute con esempi che, per quanto fittizi possano essere, rimandano in ogni caso per lo più alla realtà fisica e astronomica. Ma in realtà occorre sempre rammentare l'importanza che assumono in Leibniz le considerazioni propriamente attinenti al campo della logica e delle discipline che Leibniz stesso considera ad essa estremamente vicine, se non appartenenti ad essa in una accezione ampia del termine, come l'aritmetica, la geometria, la matematica in genere. Proprio in questa direzione va ricercato il nucleo delle idee che conducono all'idea dello spazio come "ordo rerum".

– È il caso di rammentare che la parola *situs* fa la sua prima comparsa significativa nel *De Arte combinatoria* in rapporto al problema delle permutazioni possibili di una successione di oggetti qualunque (cfr. De Risi, 2007, pp. 41-42). Nelle Definizioni, dopo aver caratterizzato il sito come *collocazione delle parti*, egli distingue tra il sito assoluto e relativo: «Il sito è assoluto o relativo: il primo è quello delle parti rispetto al tutto, il secondo è quello delle parti rispetto alle parti. Nel primo viene considerato il numero dei luoghi e la distanza dall'inizio alla fine, nel secondo non vengono osservati né l'inizio né la fine, ma viene solo considerata la distanza di una parte da un'altra parte data. Ne risulta che il primo viene espresso dalla linea, o dalle linee che non racchiudono una figura e che non ritornano su di sé, e soprattutto dalla linea retta; il secondo dalla linea o dalle linee che racchiudono una figura, e soprattutto dal circolo. Nel primo si ha la massima considerazione della priorità e della posteriorità, nel secondo nessuna. Assai opportunamente il primo si chiamerà *ordine*. E

il secondo *vicinanza*; il primo disposizione, il secondo composizione. Dunque, in ragione dell'ordine i seguenti siti abcd, bcda, cdab, dabc differiscono tra loro. Nella vicinanza però non si osserva nessuna variazione, ma un solo sito, cioè questo:

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & c \\ & d & \end{array} \quad \gg.$$

(Leibniz, 1968, p. 89).

– Questo brano, in rapporto alla questione che stiamo considerando, ha questo di notevole: che il *situs* non solo è concepito come forma possibile di relazione secondo un ordine, ma anche che gli oggetti posti in relazione possano essere oggetti qualsivoglia. De Risi commentando questo passo osserva che Leibniz riteneva che la nozione di *situs* così definita fosse applicabile a qualunque tipo di oggetto, ma in seguito egli “abbandonerà questa posizione universalistica, che anche all'interno dell'*Ars Combinatoria* non è sempre applicata. In seguito, in realtà, egli considera il *situs* in relazione all'*extensum* e non a puri concetti e nemmeno a sostanze inestese” (De Risi, 2007, pp. 41– 42).

– Io credo tuttavia ci siano in Leibniz tutte le premesse per questo passo ulteriore. L’“essere tra” assunto come costitutivo del concetto di spazio può condurre ampiamente al di là di un'idea di spazio che abbia la sua origine in ciò che ci sta intorno, ed anche al di là della consueta distinzione tra spazio geometrico e spazio fisico–reale per ottenere una generalità conseguente allo stesso *svuotamento* di contenuto del concetto.

– Le “cose” di cui lo “spazio” è ordine potrebbero essere considerate come “cose in generale”, non semplicemente i corpi, ma *qualunque entità*. In modo corrispondentemente generalizzato dovrebbe allora essere inteso anche il luogo e lo spazio come insieme di luoghi.

– Di “luogo” in questa accezione astratta possiamo parlare *ovunque si sia in presenza di una struttura d’ordine*. Non si tratterebbe dunque di rispondere alla domanda che chiede che cosa sia il luogo che un *corpo* può occupare, ma piuttosto che cosa sia il luogo considerato in modo astrattamente generale: tale nozione potrà allora essere riferita alle cose e ai luoghi dell’esperienza come ai corpi e ai luoghi di cui parliamo all’interno di un discorso fisico o astronomico; oppure nell’ambito della geometria e dell’aritmetica. Nella serie ordinata dei numeri interi non vi è forse un “luogo” per il numero 3? Oppure per ciascuna sfumatura cromatica di quello che potremmo ora chiamare spazio cromatico? O per ciascuna frequenza nello spazio sonoro? Naturalmente comportando, in questi vari ambiti, problemi e difficoltà specificamente differenti.

– Secondo una simile prospettiva di discorso, ci si orienta dunque anzitutto verso un concetto logico di luogo, intendendo con ciò non semplicemente un concetto libero da contraddizioni interne che tuttavia resta vincolato nella sua applicazione: esso viene raggiunto quando alla cosa materiale subentra l’idea di *qualcosa in generale*. A questo punto la nozione di luogo si congiunge, vorrei dire, in modo diretto ed immediato, a quella di relazione; e la nozione di spazio all’idea di un sistema di relazioni.

– Naturalmente in questa estrema metamorfosi della nozione di spazio, nulla o quasi nulla resta dello spazio in quanto originariamente costituito attraverso l’esperienza concreta delle cose. Ma già a partire dal terreno dell’esperienza concreta si intravedono diverse possibili concettualizzazioni. Nella corporeità della cosa e nel suo occupare un luogo – la possibilità di una nozione di spazio fisico-reale; nella “sagoma” della cosa, in cui il momento della materialità viene posto da parte, la possibilità di una nozione di *forma-figura*, in cui l’idea del luogo passa sullo sfondo e

si fa avanti invece l'idea dello *spazio-estensione*; per giungere, dalla rete dei rapporti spaziali che le cose intrattengono tra loro, ad una nozione di luogo e di cosa che segna la massima distanza dall'idea di spazialità originariamente costituita nell'esperienza concreta dei luoghi, delle cose e delle loro forme. Ma queste possibilità, con il loro complicati sviluppi, con i loro intrecci, gli scambi problematici che si verificano tra i vari ambiti, con gli andirivieni dal concreto dell'esperienza alle pure astrazioni intellettuali, rappresentano giochi linguistici rispetto ai quali è altrettanto importante mantenere la coscienza delle differenza quanto lo è il comprendere come essi possano trapassare l'uno nell'altro in un modo ricco di senso.

II

Immaginare e raffigurare lo spazio

Una piramide nel deserto

– Nell'ambiente che ti circonda, hai mai visto autentiche forme euclidee, ad esempio, una pietra perfettamente cubica? Io credo di no. E questa circostanza potrebbe in fondo essere citata in un *elogio dell'autonomia del pensiero delle forme*.

– Ad esempio, siamo tentati di chiederci: da dove trassero gli egizi l'immagine della *piramide* e con tanta forza da fare di essa una sorta di simbolo di una straordinaria civiltà e di una straordinaria cultura? Intorno a loro c'era solo deserto, con le sue dune tondeggianti: nemmeno un pino, un'abete, una montagna impervia.

Una piramide nel deserto: quale persuasivo esempio di che cosa possa significare la *produttività dello spirito*, espressione che a volte ci sembra suonare così retorica e vuota! Nella sua massiccia concretezza, la piramide riempie invece di senso quelle parole evocando una dialettica complessa del modo di rapporto con la

realtà semplicemente data: forma verticale perfetta e chiusa in uno spazio orizzontale immensamente aperto, la piramide egizia con le sue complesse simbologie ci appare come una sintesi compiuta tra operazioni immaginative e operazioni intellettuali, le une fittamente intrecciate all'interno delle altre, come forze cooperanti per un unico progetto che si può chiamare *spirituale* proprio perché è il risultato di questa cooperazione.

– Le strutture costitutive essenziali della spazialità sono anche i fondamenti e le basi per processi di valorizzazione: una schematizzazione di queste strutture costitutive offre una sorta di filo conduttore per la problematica delle valorizzazioni inerenti al momento spaziale. Ascendere. Discendere. Avanzare. Ritornare. Caduta. Cerchio. Triangolo. Sfera. Riga obliqua, orizzontale. Verticale. Figurazione simmetrica... Nella *Poetica dello spazio* di Bachelard, ci vengono descritti luoghi sospesi in una dimensione immaginaria – scale, corridoi, cantine, conchiglie.. che sono sulla via di diventare simboli.

Spazi dell'immaginazione

– Vi sono poi gli spazi immaginari. Spazio immaginario si dice almeno in due sensi: spazio liberamente fantasticato, che ha un carattere fantastico nelle sue connotazioni interne; e spazio immaginario nel senso di uno spazio “sovrapposto” allo spazio reale e “distinto” da esso (spazio del gioco, spazio sacro, spazio scenico).

– Vi sono molti modi secondo i quali si può parlare di un paesaggio “fantastico”. Nelle architetture di Escher la costruzione raffigurativa è tale da impedire una “sintesi”. Si provocano conflitti mentre si finge di ricondurre ad unità l'insieme. Le scale di Escher salgono e scendono restando sullo stesso piano. Quella di Escher è una fantasia dello spazio in senso molto preciso –

vengono sconvolte le determinazioni spaziali “originarie”, che costituiscono lo spazio – l’avanti, il dietro, il sopra e il sotto, ecc. Queste determinazioni sono diventate ambigue, ambivalenti. Pure apparenze. Ciò vale anche per le figure tridimensionali impossibili. Ciò su cui occorre attirare l’attenzione non è tanto l’impossibilità di realizzarle in concreto, quanto piuttosto la peculiare impressione di “incoesione” e di “conflitto” che esse generano.

– In Delvaux invece la spazialità immaginaria viene resa con altri mezzi, con la singolarità degli eventi che in essa compaiono, l’eterogeneità dei personaggi che la abitano... Dalla pittura si possono trarre infinite indicazioni su una possibile fenomenologia degli spazi immaginari. Manipolazioni della prospettiva. Divertimenti settecenteschi. Moltiplicazione dei punti di vista (esempi moderni). Adozione di punti di vista inconsueti (tecnica fotografica e cinematografica).

Il simbolismo degli aspetti

– Le osservazioni di Arnheim sulla bidimensionalità e tridimensionalità nel cinema (Arnheim, 1960) sono strettamente dipendenti dalla sua concezione della creatività legata all’impiego dei mezzi, alla tecnica della ripresa. Poiché contro questa possibile creatività si potrebbe obiettare che la macchina da presa come del resto la macchina fotografica riproduce la realtà così come è (come la vediamo), Arnheim si avvale di vari argomenti per sottolineare la distanza tra realtà percepita e immagine cinematografica. Ma questo problema – impostato un poco ingenuamente (del resto ci troviamo di fronte ad una estetica cinematografica ai suoi inizi) – insieme a moltissimi spunti ricchi di interesse, porta anche a prese di posizioni troppo elementari. Così vi è una propensione in Arnheim a considerare orientata in senso anti-artistico ogni innovazione tecnica che conduca in via

di principio ad una maggiore approssimazione alla realtà. I limiti del mezzo diventano pregi perché consentono un'appropriazione soggettiva della realtà, una sua traduzione espressivo-immaginativa. Secondo Arnheim, quanto più l'immagine tende illusionisticamente alla riproduzione della realtà, tanto più essa ci rimetterebbe in fatto di capacità espressiva. Di qui il tendenziale rifiuto del sonoro, ed anche del film a colori. In questa stessa direzione sono orientate le perplessità intorno alle tendenze ad ampliare le dimensioni dello schermo o l'interesse di una ricerca per una "visione stereoscopica".

– Arnheim dice che l'immagine cinematografica "non è assolutamente bidimensionale e neanche assolutamente tridimensionale". Ciò non mi sembra troppo giusto. Io direi piuttosto: l'immagine è oggettivamente piatta; ma la terza dimensione è *data nella rappresentazione*. La cosiddetta visione stereoscopica non è altro che una *accentuazione* della rappresentazione della profondità.

– La differenza tra l'apparenza della tridimensionalità e la tridimensionalità reale-oggettiva può essere illustrata pensando ad un'immagine riflessa in uno specchio. Se mettete uno specchio in fondo ad un corridoio, l'unica cosa che vi impedisce di tentare di andare oltre è la circostanza che nell'avvicinarvi ad esso vi accorgete probabilmente che quella figura che viene verso di voi siete voi stesso (anche se mi è accaduto una volta, in simili circostanze, di cedere più volte il passo ad una persona che a sua volta mi cedeva il passo con eguale ed assoluta ostinazione). La terza dimensione reale ha uno strato *puramente visivo* che non differisce per nulla dall'immagine dello specchio. Che cosa dunque potrebbe voler dire che l'immagine cinematografica (o fotografica) è bidimensionale e contrapporre questa bidimensionalità alla tridimensionalità della realtà? Oppure che essa non è propriamente né bidimensionale né tridimensionale?

– Le tecniche cinematografiche ci offrono un’infinità di elementi di discussione in rapporto ai problemi di una fenomenologia della visione e in direzione della tematica dell’espressività in genere. In rapporto al problema della spazialità ci si dovrebbe soffermare soprattutto sulla questione del “punto di vista”. Peraltro immagini percettive e immagini cinematografiche hanno in comune proprio il fatto che esse sono sempre colte da un determinato punto di vista. Ma questa circostanza diventa una tecnica peculiare per l’espressione cinematografica.

– Arnheim nota, ad esempio, che la ripresa dal basso tende ad esprimere la forza dominatrice di un personaggio. Si ottiene allora un effetto di ingrandimento delle proporzioni e nello stesso tempo un particolare tipo di deformazione. Entrambe le cose propongono l’immagine del sovrastare. Essa gioca in certo senso su due piani, tenendo conto del modo in cui è implicato lo spettatore. Da un lato essa ha il senso: persona vista dal basso; ma poiché sono proprio io, lo spettatore, a vederla così, ed io non sono affatto in basso e non guardo verso l’alto, l’effetto della relativizzazione del punto di vista si indebolisce, mentre assume forza proprio il momento della deformazione prospettica come deformazione espressiva. In generale Arnheim dice troppo poco sulla relazione con lo spettatore. Nella visione del film, ciò che viene afferrato è anzitutto il “fenomeno” piuttosto che la cosa stessa, o meglio: il rapporto tra fenomeno e cosa diventa ambiguo. Se venisse colto soltanto “un uomo visto dal basso” resterebbe la relazione al punto di vista, ma verrebbe meno la distorsione che, assolvendo la funzione di mediazione fenomenica, si dissolverebbe come tale. Invece viene colta sia la visione dal basso sia la distorsione, ed è proprio questa circostanza che fa assumere *rilievo simbolico–espressivo* al punto di vista.

– In rapporto al cinema dovremmo forse parlare di un vero e

proprio “simbolismo degli aspetti” come di un mezzo espressivo fondamentale. La “sintesi immaginativa” si basa non tanto sulla cosa, ma sull’*aspetto della cosa*. Ciò vale naturalmente anche per fotografie o dipinti, ma forse nel caso di sequenze di immagini che hanno una qualche forma narrativa, il simbolismo dell’aspetto assume una particolare pregnanza.

– Un disegno è una figura bidimensionale, che resta tale naturalmente anche se rappresenta un edificio, un paesaggio, un ambiente in genere. Qui la tridimensionalità è *apparente* nel duplice senso del termine: nel disegno appare la profondità e nello stesso tempo questa profondità è illusoria. Ma per la profondità illusoria *valgono le stesse regole fenomenologiche che per la costituzione della spazialità visiva non illusoria*.

– Vi sono diversi modi per fare apparire la profondità. Ad es.: una cosa ricopre parzialmente un’altra. Questo problema della copertura parziale appartiene al nostro ambito di discorso. Qualunque tecnica di raffigurazione che in un modo o nell’altro faccia apparire la profondità può essere per noi interessante. Ci interessano *le modalità in cui la profondità viene fatta apparire*, non invece la questione di quale tecnica consenta una *rappresentazione più fedele dello spazio percepito*.

– Rappresentazione infantile dello spazio. Arnheim ed altri dicono che i bambini raffigurano le cose non come le vedono, ma come le *pensano*. Ciò mi impensierisce.



III

Sui quattro bellissimi corpi

Geometria e mito

– La posizione platonica è tutta orientata in direzione del problema della *possibilità di una conoscenza oggettiva*, quindi – come diremmo oggi – in una direzione epistemologica. Platone prende le distanze dall’esperienza sensibile, ma più precisamente: prende le distanze da ciò che nell’esperienza sensibile appartiene alle particolarità provvisorie, alle componenti accidentali, che non sono afferrabili e fissabili in un risultato conoscitivo permanente. Il suo rimando alle componenti ideali non è affatto dovuto anzitutto ad un’esigenza “sistemica” di ordine metafisico, ma ad un’esigenza di teoria della conoscenza. Forse potremmo dire che con *Platone prende forma l’idea stessa di un’epistemologia*.

– In questo quadro assume una significativa esemplarità la conoscenza geometrica: la sua certezza, la sua indipendenza dalla sensibilità. Ma è Platone stesso che la mette in evidenza e la teorizza, strappandola al mondo delle pratiche geometriche concrete.

– Nelle sue opere più tarde – in particolare nel *Timeo* – il Platone epistemologo diventa “metafisico” e tenta un abbozzo di “sistema del mondo”. La guida per delineare questo sistema è anzitutto fornita dalla *narrazione mitica*, sempre presente nella speculazione platonica, ma che qui assume forse più che altrove importanza e peso. Naturalmente non si tratta del mito inteso come favola e nemmeno come appartenente ad un pensiero e ad una ritualità di ordine religioso. La narrazione mitica appare qui come una narrazione essenzialmente “filosofica”, cioè come una veste immaginativa che, proprio in quanto è prodotta dall’immaginazione, colma efficacemente con ricchezza di senso le lacune

che né l'intelligenza né l'esperienza riescono a superare, riuscendo a dare un corpo a pensieri profondi che concernono l'essenza stessa della realtà.

– Alla narrazione mitica si affianca la geometria. *Mito e geometria*: questo straordinario connubio sta alla base della speculazione platonica, e in modo particolare all'approccio platonico del problema dello spazio.

– Lo spazio in Platone viene chiamato *chora* (χώρα). Taluni traducono χώρα con “posto”, “luogo”, “posizione”. Come χώριον oppure χῶρος, può indicare anche terreno, regione, ecc. Si tratta di una traduzione letteralmente corretta, ma estranea allo spirito della impostazione platonica, alla quale mi sembra più conforme la parola “spazio”. Questa scelta non è indifferente per il fatto che la parola “luogo” è invece particolarmente adatta ad indicare la posizione aristotelica, che adotta il termine τόπος.

La maternità dello spazio

– Lo spazio riceve in Platone delle qualificazioni che rammentano il caos originario di cui parla il mito: il pensiero dello spazio ci riporta indietro ad uno stato che precede l'ordine cosmico, dunque il mondo stesso. Come nel mito, questo pensiero *sembra* non districarsi in Platone dal pensiero di una pura *matericità informe*, fluida, magmatica, internamente non delimitata, che tuttavia contiene potenzialmente tutte le forme possibili: di qui esse dovranno scaturire attraverso l'opera del “demiurgo”: il dio senza nome che dal caos fa emergere il cosmo.

– Non sorprende allora che a questa matericità siano associate idee che *si riconnettono alla vita*, o meglio: alla *generazione della vita*. In questa direzione in realtà va inteso l'attributo più frequente e caratteristico per questo aspetto della tematica dello spazio: Pla-

tone parla dello spazio come *upodoché* (ὑποδοχή) – un’espressione solitamente tradotta con *ricettacolo*, che contiene nel suo etimo il richiamo ad una cavità e precisamente ad una cavità che accoglie: ad una *accogliente cavità*. Non solo ricettacolo, dunque: ma “*ricettacolo di tutto ciò che si genera*”: per questo motivo lo spazio può essere caratterizzato come *madre* o *nutrice*.

– La nascita – e dunque la morte. Nello spazio ha luogo l’intera vicenda della vivere e del morire. Vi è il pensiero delle origini dal caos, della generazione del mondo, e nello stesso tempo di un perenne avvicinarsi della vita e della morte *sullo sfondo* eterno di uno spazio che continua a farsi mondo.

Il grande animale

– In questa ripresa con gli occhi del mito, il primo pensiero dunque non va certo allo spazio *che sta immediatamente di fronte a noi*, allo spazio-che-ci-circonda, al luogo che noi e le cose occupiamo, ai “vuoti” che ci sono fra esse, ecc. Lo spazio viene invece inteso anzitutto come *nozione totalizzante*, ovvero come *nozione che implica l’idea della totalità delle cose e degli eventi*.

– E notare questo non basta ancora: viene infatti richiamata una *nozione dell’universo fortemente connotata in senso organicistico*. Lo spazio inteso anzitutto come disordine caotico è anche un disordine pieno di una vita potenziale, uno spazio “gravido” dell’infinita varietà delle forme viventi, e nello stesso tempo, quando da questo caos il demiurgo cava un universo ordinato, un *cosmo*, esso è concepito come un essere vivente, come un *grande animale*, anzi come il più perfetto degli animali: un animale che, a differenza di tutti gli altri, che sono soggetti ad una perenne trasmutazione, alla generazione ed alla corruzione, è invece eterno e non ha bisogno di nulla. Per bocca di Timeo Platone si esprime proprio così: «Perché l’artefice fece il mondo di tutto il fuoco e l’acqua

e l'aria e la terra senza lasciare fuori nessuna parte o qualità di nessuno di essi: ed ha realizzato la composizione affinché anzitutto l'animale fosse, quanto più possibile perfetto, e formato di parti perfette; ed affinché fosse unico, in quanto nient'era stato lasciato, donde potesse farsi un altro simile; e infine in modo tale che fosse immune da vecchiezza e da morbo, perché egli sapeva che il caldo e il freddo e tutti gli agenti di grande energia, circondando dal di fuori un corpo composto e importunamente assalendolo, lo sciogliono, inducendovi morbi e vecchiezza e lo fanno morire» [33a].

– A questo grande animale, e proprio per le sue caratteristiche di totalità eternamente vivente, viene attribuita una forma ben determinata: si tratta di un animale “rotondo”, di un animale di *forma perfettamente sferica*, senza occhi, senza orecchie, senza gambe né mani – perché essendo la totalità stessa questo animale non ha nulla da vedere o da udire o non vi sono cose fuori di esso da afferrare e nemmeno “spazi” da percorrere. «Ora all'animale che doveva raccogliere in sé tutti gli animali, conveniva una forma, che in sé raccogliesse tutte quante le forme. Perciò arrotondò il mondo in forma sferica e circolare, egualmente distante in ogni parte dal centro alle estremità. Questa è di tutte le figure la più perfetta e la più simile a se stessa [=omogenea], giudicando il simile infinitamente più bello del dissimile. E lo fece perfettamente liscio tutt'intorno per molte ragioni. Infatti non aveva alcun bisogno di occhi, non essendovi rimasto niente da udire: né vi era aria intorno, che richiedesse di essere respirata....E le mani con le quali non aveva nessun bisogno di prendere né di respingere alcuna cosa, il demiurgo non credette di dovergliene aggiungere invano, e nemmeno i piedi, né quant'altro serve per camminare» (33b).

– Platone aggiunge poco oltre che gli conferì comunque un movimento rotatorio, che è in realtà un movimento “nello stesso

luogo”, e per quel movimento non vi è certo bisogno di gambe e di piedi.

Le quattro materie primigenie

– Questo è l’aspetto mitico del discorso platonico. Certo, il riferimento alla sfericità del grande animale ci fa intravedere il versante geometrico. L’immagine della sfera ci seguirà nei sotterranei dei nostri discorsi.

– Ma può veramente esservi una confluenza significativa, a partire di qui, con l’elemento geometrico-matematico? Per comprendere questo nesso è bene anzitutto che ci liberiamo del pregiudizio che vi sia una sorta di contrapposizione tra l’elemento geometrico-matematico e l’elemento organico-vitale. *Questa contrapposizione è in realtà tipicamente “moderna”,* ed in ogni caso non è affatto detto che sia ben fondata e che non celi una complessità di cui la semplice contrapposizione non può certo rendere conto.

– In ogni caso si tratta di una contrapposizione che non esiste per il pensiero greco, per Platone in particolare: l’organicità è infatti connessa in Platone con l’ordine, la proporzione, la corrispondenza interna tra le parti, con la loro interna concordanza. Assume particolare significato da questo punto di vista *la relazione tra musica e matematica*: l’organicità rimanda all’armonia in un senso che riguarda ad un tempo l’universo stesso, la matematica e la musica.

– Tuttavia questa considerazione di ordine generale non può pretendere di fornire una risposta effettiva alla nostra domanda. Essa può valere come premessa e come indicazione iniziale, ma non ci porta nel vivo della questione e in particolare non mostra che l’approccio platonico, che da un lato si aggancia saldamente

all'immaginazione come del resto alla speculazione dei filosofi presocratici, dall'altro se ne distacca nettamente ed in questo distacco diventa visibile la funzione del modello geometrico-matematico.

– Nell'immaginazione mitica così come nella filosofia presocratica e del resto anche negli sviluppi filosofici che vanno anche oltre Platone, il passaggio dal caos al cosmo viene spesso concepito alla luce della teoria delle *materie primigenie* – terra, acqua, aria, fuoco – sia che queste materie vengano concepite come egualmente originarie, sia che l'una di esse sia privilegiata come autentico principio di tutte le cose, come autentica *arché*.

– Si tratta di una impostazione del problema dell'origine dell'universo che Platone critica molto vivacemente. Per Platone infatti, le materie primigenie, proprio perché stanno all'origine di tutto, non possono avere lo stesso statuto ontologico di quelle stesse materie così come le conosciamo ordinariamente: ed invece, a quanto sembra, quell'impostazione *affonda le sue radici proprio in questa esperienza ordinaria*, che è in particolare esperienza sensibile. Si tratta dell'esperienza della terra che calpestiamo o che possiamo impastare con acqua, dell'esperienza dell'acqua che vediamo scorrere nei fiumi o scaturire dalle sorgenti, del fuoco con cui possiamo scaldarci bruciando la legna, dell'aria come vento che soffia, come alito o come respiro. Ed è ancora dell'osservazione comune la possibilità di una relazione interna tra questi elementi: ad esempio, l'acqua può spegnere il fuoco, ma dal fuoco può anche essere fatta evaporare e dunque trasformata in aria. Vi è qui l'idea della possibilità di un trapassare di un elemento materiale nell'altro, e dunque di una *condensazione* o di una *rarefazione*: l'idea della rarefazione trova esemplificazione particolarmente evidente ai sensi nell'evaporazione dell'acqua attraverso il riscaldamento; per la condensazione forse è abbastanza persuasiva l'acqua che diventa ghiaccio oppure la pioggia che scende dalle

nubi: come se si trattasse dell'acqua che una volta evaporata e dunque divenuta aria, nuovamente si addensi diventando nube e ritornando acqua in forma di pioggia. Queste idee di rarefazione e condensazione, che hanno origine in osservazioni quotidiane possono poi essere venire interpretate come momenti che realizzano la trasformazione delle quattro materie primigenie l'una nell'altra. Si prendono dunque ancora le mosse dall'*osservazione ordinaria* per poi trasportarla sul più ampio piano di una *speculazione sull'essenza della realtà* e in particolare sull'essenza della materia.

– Ora è estremamente indicativo del modo di pensare platonico non solo *il rifiuto di effettuare questo passaggio*, ma anzitutto il fatto che proprio osservazioni come queste possano essere considerate come *indicative della precarietà delle nozioni ottenute sulla base dell'esperienza sensibile*. Se è vero che vi è questa continua modificazione dell'un elemento nell'altro come potrai dire di sapere che cosa è fuoco, che cosa è aria, che cosa acqua o terra? Per impiegare un'immagine nostra: se ti affidi al sapere che hai dell'acqua attraverso l'osservazione, questo sapere sguscerà via dalla tua mente esattamente come acqua che evapora al fuoco – e parlerai di terra, acqua, aria e fuoco senza poterne afferrare l'autentica essenza.

– Rammentiamo il problema fondamentale di Platone: come è possibile una conoscenza oggettiva? È necessario andare oltre questo flusso di trasformazioni sensibili per afferrare quel che vi è stabile e di permanente in esse. Nel *Timeo* viene effettuato questo passo, ed esso non procede più in direzione del mito, ma in direzione della geometria, anche se di una geometria ancora pensata sotto il fascino dell'elemento mitico.

Schema dell'interpretazione platonica

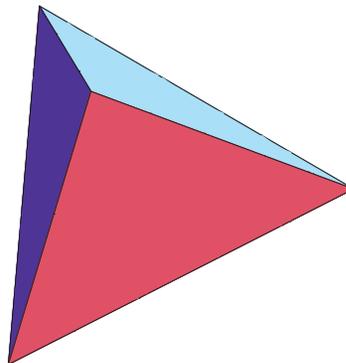
– Conviene premettere ad un'esposizione più particolareggiata

lo schema del percorso che verrà seguito. Intanto è chiaro che il compito proposto potrà essere considerato assolto se riuscissimo a ricondurre in qualche modo le quattro materie primigenie della tradizione mitica a forme geometriche. Che non potranno certo essere forme qualunque, ma dovranno avere caratteristiche speciali, e in particolare dovranno anch'esse *possibilmente* corrispondere nel numero al numero delle materie originarie.

– *Possibilmente*: non possiamo pretendere troppo da questo modo di argomentare, che comunque ci riserva delle sorprese e che saprà far tesoro anche delle non perfette congruenze.

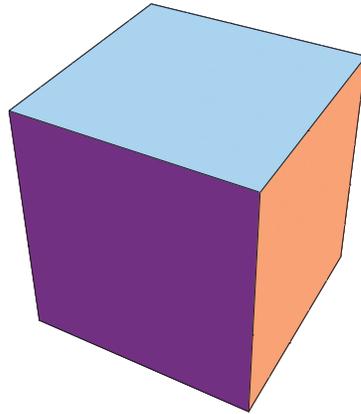
– Ora ci sono tra le forme geometriche *cinque solidi* – e non più di cinque – che hanno caratteristiche molto speciali: si tratta dei cinque poliedri regolari – il tetraedro, l'esaedro o cubo, l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro. La regolarità consiste nel fatto tutte le facce sono poligoni regolari eguali e eguali i diedri formati da due facce consecutive. Come conseguenza non irrilevante di tutto ciò, ogni solido regolare può essere iscritto in una sfera. Platone *associa* il tetraedro ovvero la piramide a quattro facce al fuoco, l'esaedro ovvero il cubo alla terra, l'ottaedro all'aria, l'icosaedro all'acqua. Questi sono quegli che egli chiama “i quattro bellissimi corpi” (53c).

– tetraedro

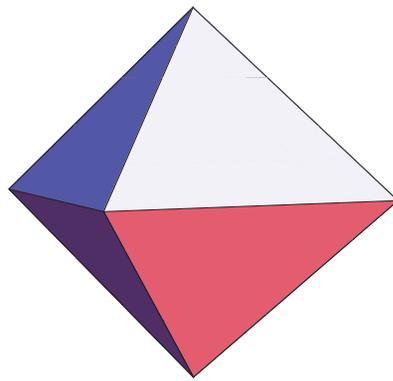


60

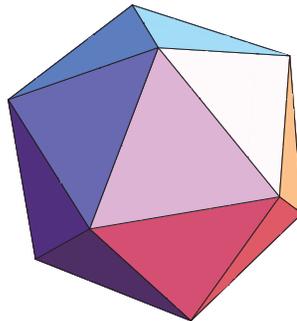
– esaedro (cubo)



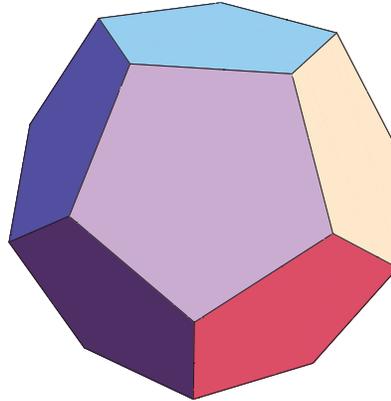
– ottaedro



– icosaedro



– E il dodecaedro? Ad esso dovremmo dedicare un commento a parte.



– Ciò che ci orienta in questa direzione non è forse già la peculiarità del numero – cinque e non più di cinque, di fronte all’infinita molteplicità dei poligoni regolari? Quando i *molti* si fissano in un *numero invalicabile*, già questo eccita la fantasia mitico-filosofica. E i cinque – e per il momento i quattro – bellissimi corpi già per questo sono destinati ad assumere un significato di rilievo assoluto nell’ordine cosmico, in quanto nuclei intelligibili della matericità che appare all’esperienza sensibile. Ma questo indizio deve essere perfezionato: e dovremo arrivare a rendere conto delle trasformazioni delle materie sensibili che si rivelano all’osservazione attraverso le relazioni formali-ideali tra i quattro solidi.

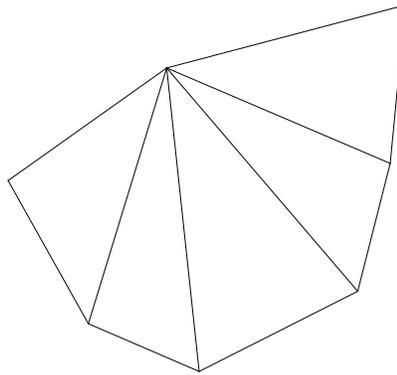
– Nell’accennare ad un elogio dell’autonomia del pensiero delle forme, avevo notato che non ti sarà facile trovare, nell’ambiente che ti circonda, cose che hanno una forma “perfetta”, ad esempio una pietra che abbia la forma di uno dei cinque solidi: la forma perfetta, si intende: la regolarità non tollera approssimazioni. Ma questa *autonomia*, che significa anche *creatività*, talora mette a disagio, cosicché vi sono interpreti che si affrettano ad

informare, ed a rassicurare, il lettore che «i cinque poliedri regolari non sono solo il frutto di un procedimento puramente intellettuale, giacché anche nel mondo naturale non mancano esempi di forme riconducibili alle cinque figure solide regolari» (Gario, 1979, p. 26). Si allude qui ai problemi posti dalle forme dei cristalli ed alle questioni di grande interesse relativi alla cristallografia. Si è rilevato intanto che «tra le svariate forme cristalline ritroviamo quelle del tetraedro, del cubo e dell'ottaedro» mentre mancano le forme del dodecaedro e dell'icosaedro (ivi, p. 26). Altri problemi di notevole interesse si sono manifestati alla luce delle indagini della struttura atomica dei cristalli (ivi, p. 18–26). Ma si tratta manifestamente di esempi che hanno ben poco a che vedere con la speculazione platonica. In rapporto alla quale occorrerebbe avvertire il lettore dell'esatto contrario: i solidi platonici sono proprio “il frutto di un procedimento puramente intellettuale”, che essi sono autentiche costruzioni intellettuali e Platone li vuole esplicitamente far valere come tali.

– Su queste costruzioni l'immaginazione associativa è fin dall'inizio in opera. Ma il punto fondamentale è che sarebbe sbagliato ritenere *necessario* ritrovare una qualche somiglianza tra la forma geometrica e l'elemento di cui essa sarebbe l'essenza — dal momento che non è questa somiglianza a motivare l'andamento del discorso platonico. Vi è invece un motivo più forte, che in certo senso ci fa dimenticare il riferimento concreto alle materie primigenie, e che è connesso alla struttura formale degli oggetti geometrici e che fa venire in primo piano il problema della possibilità del trapassare l'uno nell'altro.

– Ad eccezione del cubo e del dodecaedro, tutte le facce degli altri solidi regolari — quindi il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro — sono triangoli equilateri. Ma anche il quadrato che rappresenta la faccia del cubo e il pentagono che rappresenta quella del dodecaedro possono essere suddivisi in triangoli. Il quadrato suddiviso

dalla diagonale esibisce due triangoli isosceli e triangoli isosceli risultano anche dalla suddivisione del pentagono ad opera delle sue mediane. Questo risultato può essere generalizzato perché, se consideriamo qualunque poligonale chiusa e convessa, che è il caso che qui ci interessa, essa potrà essere sottoposta ad una operazione di *triangolazione*, tracciando un segmento da un solo vertice agli altri vertici non consecutivi, quindi senza intersezioni. Naturalmente ciascun triangolo interno così ottenuto potrà essere indifferentemente equilatero, isoscele o scaleno. Il punto importante è che si possa riportare una forma piana qualunque a superfici triangolari.



Questa possibilità è un passo che conferma e rafforza la tendenza interpretativa a ridurre la materia alla spazialità. L'idea della materia deve essere ripensata secondo l'angolatura che questa tendenza suggerisce, e in realtà andare verso la propria dissoluzione. In precedenza abbiamo parlato di una *matericità informe*, rievocando anche l'immagine mitica del caos. Abbiamo anche parlato di una potenzialità di tutte le forme, assimilando questa potenzialità ad una *materia non ancora plasmata*. Queste immagini possono ancora essere mantenute, ma *l'accento deve essere spostato*, ed in maniera assai significativa. Questa matericità infatti si è rivelata essa stessa *fatta di spazio* ovvero di *forme* e di *figure* spaziali.

– L'elemento della forma-figura si fa avanti prepotentemente mentre l'idea della matericità si indebolisce sempre più e si rafforza invece quella di una spazialità concepita come *pura estensione* che ha in sé la potenzialità di tutte le forme in quanto ogni forma può essere intesa come *parte di essa*, ovvero come il risultato di una suddivisione, come un *ritaglio* di essa. La triangolazione è una sorta di suddivisione primaria da cui possono derivare tutte le altre forme.

– Debbo avvertire che un simile percorso, così esplicito, così diretto, in Platone non lo si ritrova. Non abbiamo difficoltà ad ammettere che, in particolare con queste ultime considerazioni andiamo piuttosto nettamente oltre la lettera del testo, operando un prolungamento a cui siamo indotti dal ripensamento del percorso platonico.

Il problema della triangolazione

– La specificità della posizione platonica non sta soltanto nel fatto di riportare le quattro materie primigenie ai poliedri regolari integrando la questione geometrica in un sistema del mondo secondo una *forma mentis* che pensa in forme matematiche, quindi in realtà in forme relazionali, con le quali ha sempre a che fare il pensiero geometrico. Sta anche, e forse soprattutto, nel modo in cui questa integrazione viene effettuata fino dai suoi primi passi. Occorre allora anzitutto dare la dovuta pregnanza di significato al *primo attacco del problema in Platone*.

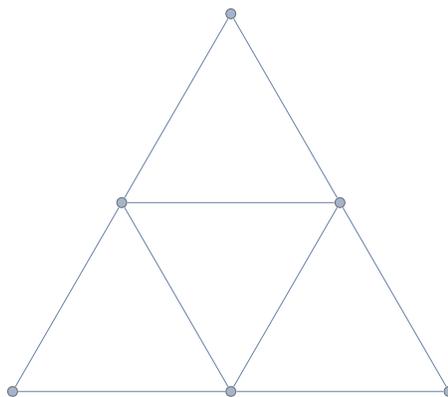
–Rileggiamo con attenzione questo attacco: «E prima di tutto è chiaro ad ognuno che fuoco, terra, acqua e aria sono corpi. Ma ogni specie di corpo ha anche profondità; ed è assolutamente necessario che la profondità contenga in sé la natura del piano, e qualunque superficie chiusa da una linea rettilinea si compone di triangoli» [53c].

– Si tratta di passaggi estremamente rapidi, ma assai significativi. Dal fatto che le quattro materie sono corpi, Platone sottolinea subito che è proprio di esse la “profondità” ovvero la terza dimensione, e ciò ci potrebbe far supporre un ulteriore passaggio ai “solidi”.

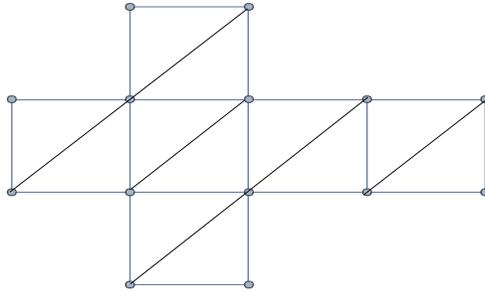
– Invece non è così. Infatti si afferma subito che ciò che è essenziale alla tridimensionalità è il piano, la superficie. È come se fin da questo primo attacco Platone pensasse prima ancora che al solido, al suo possibile *sviluppo* sul piano, o meglio ancora: pensando al solido Platone pensa soprattutto al *modo di costruirlo* a partire da una superficie piana e quindi ai pezzi necessari per comporlo. Tutta la questione è posta in termini genetico-costruttivi.

– Intanto si possono riportare sul piano le forme fondamentali, squadernandole in modo che esse possano essere ricomposte:

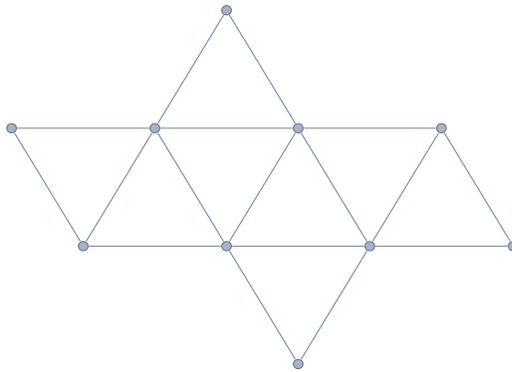
– tetraedro



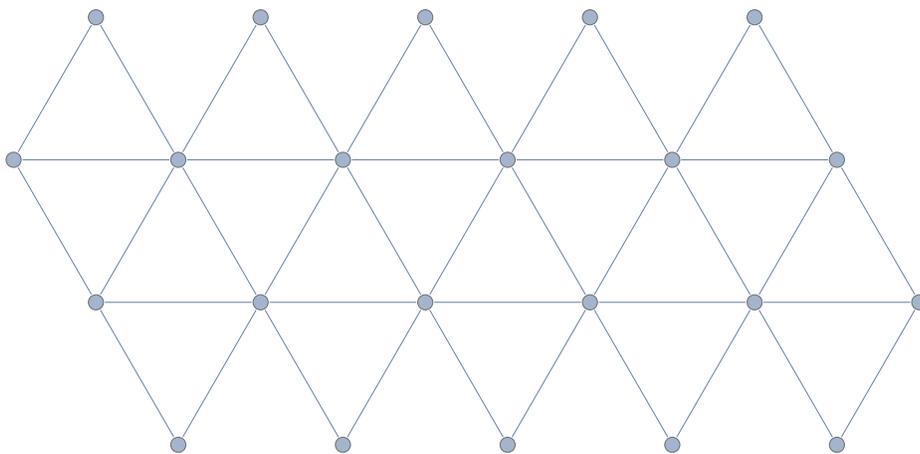
– esaedro (cubo)



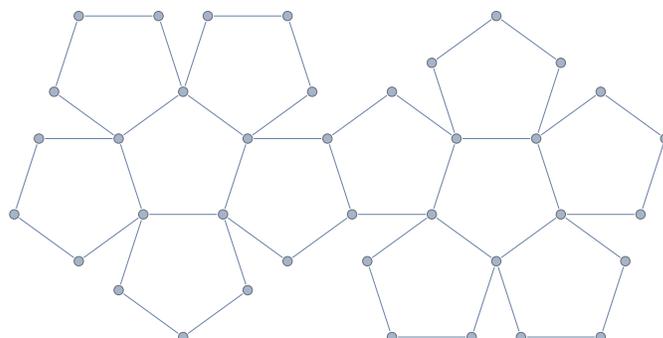
– ottaedro



– icosaedro

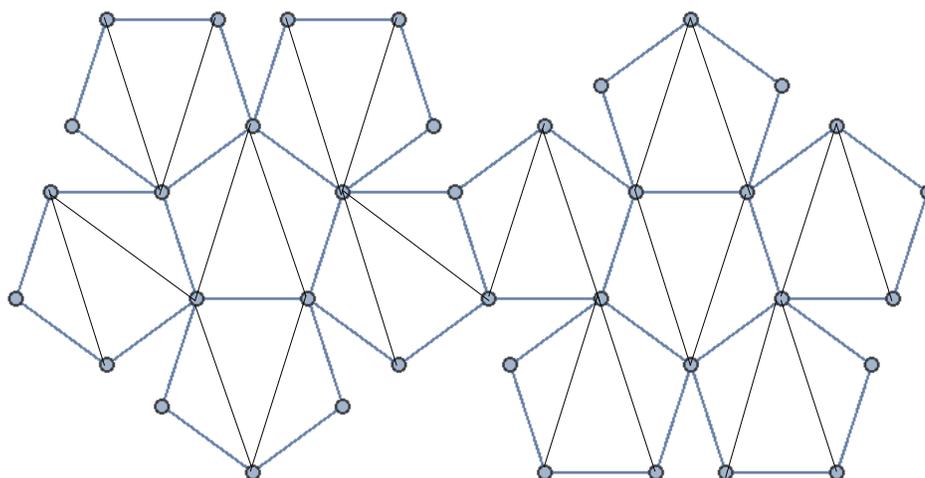


– dodecaedro



(Di ciò Escher approfitterà per un suo variopinto e geniale album sui solidi platonici).

– Sappiamo già, e lo vediamo ancor meglio dalle figure squadrate, che il triangolo è dominante nelle tre forme del tetraedro, ottaedro e icosaedro. Ma è chiaro anche che la diagonale del quadrato realizza due triangoli e tre triangoli risultano congiungendo un vertice del pentagono con gli altri vertici non consecutivi.



A mio avviso in tutta questa tematica platonica l'idea della trian-

golazione dello “spazio” è dominante ed essa è manifestamente suggerita proprio dalla riflessione sui solidi regolari, benché il suo “campo di azione” sia più ampio.

– Alcuni commentatori rammentano che la triangolazione era un metodo pratico di misurazione delle aree. Con questo metodo era possibile misurare l’area di superfici anche molto irregolari, proprio perché esse potevano essere ridotte ad un certo numero di triangoli di cui era relativamente facile ottenere le misure e calcolare l’area. Questo riferimento è certamente pertinente, ma occorre nello stesso tempo attirare l’attenzione sul fatto che questa possibilità non è certo considerata qui come il risultato di una mera *constatazione empirica*, ma è diventata una *possibilità essenziale*. Tutto il problema si pone ora sul terreno di ciò che appartiene all’eidos, all’essenza. All’essenza dei corpi appartiene la profondità; ma all’essenza della profondità appartiene il riferimento al piano. Ed ogni figura tracciata nel piano, e precisamente ogni figura poligonale chiusa – e la “convessità” è sottintesa – dunque ogni poligono in senso usuale può essere diviso in triangoli.

Come se si dicesse: prendete una superficie a piacere, comunque delimitata. E potrete suddividerla in modo tale che essa risulti composta solo da triangoli. Una superficie qualsiasi, presa a piacere: queste parole innocue, questo *qualsiasi*, questo *fa come vuoi*, annunciano il passaggio ad una vera e propria nuova *modalità del pensiero*, che non guarda più semplicemente alla particolarità, alle caratteristiche empiriche e perciò precarie, ma a ciò che appartiene alle regole interne che sono costitutive della forma come tale.

– Nello stesso tempo la molteplicità delle forme possibili si rivela “riducibile”, dal momento che ogni forma può essere considerata come risultante di una *composizione* di un unico tipo formale. Come i filosofi che lo hanno preceduto, Platone cerca gli “elementi”

nel senso di *parti ultime*, ma secondo uno stile interamente nuovo.
La riduzione al triangolo "platonico"

– Se è il triangolo si rivela così significativo rispetto alle forme in genere, esaminiamo più da vicino il triangolo stesso. Possiamo operare in rapporto ad esso ancora qualche partizione che risulti in qualche modo significativa? La richiesta di significatività è certo ovvia: non si chiede qui una partizione qualunque, con linee qualunque, ecc.: ma una partizione che metta in gioco *tipologie formali e compositive ben definite*, che possano essere attribuite all'essenza.

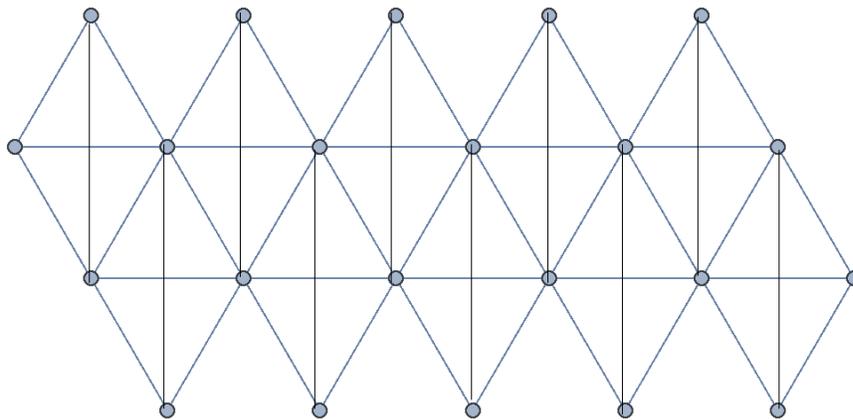
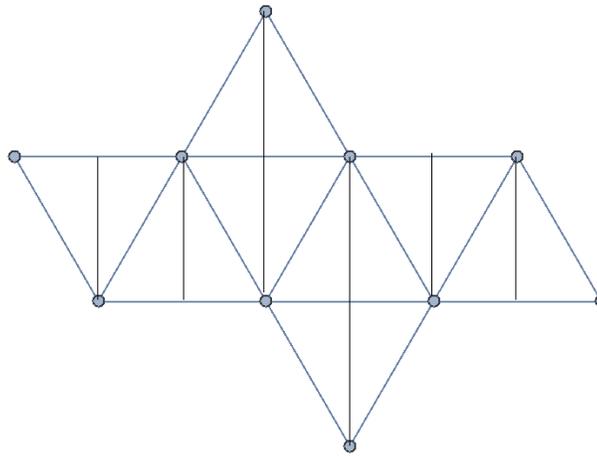
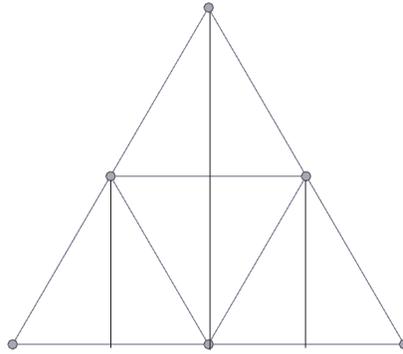
L'attenzione cade allora sulla possibilità di suddividere un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. Ciò può avvenire tracciando da un qualsiasi vertice la perpendicolare al lato ad esso opposto. Questa non è una possibilità empirica, ma *eidetica*: ad ogni triangolo spetta la possibilità di principio di essere suddiviso in triangoli rettangoli.

Questi a loro volta sono di due tipi: o hanno due, e solo due lati eguali – i due cateti, ovviamente – oppure tutti i lati sono diseguali. Tutti i triangoli *rettangoli* si distinguono dunque in due specie: gli isosceli e gli scaleni (53d). Ecco dunque un'ulteriore "riduzione" all'elementare. Non sono i triangoli in generale che vanno considerati, ma i triangoli *rettangoli* come "costituenti" dei triangoli in genere.

– Si noti che l'espressione "costituenti" ha evidentemente un senso particolare: essa rimanda ad una possibile suddivisione del triangolo e nello stesso tempo, correlativamente, ad una sua possibile costruzione. Ad un processo di decomposizione è ovviamente correlato un processo di composizione. Tutto il percorso mostra poi di essere guidato non da un intento puramente tipologico-classificatorio, ma piuttosto dal tentativo di rintracciare un percorso per una *costruzione* possibile. Rivediamo intanto i tre solidi le cui facce sono triangoli equilateri, ulteriormente suddi-

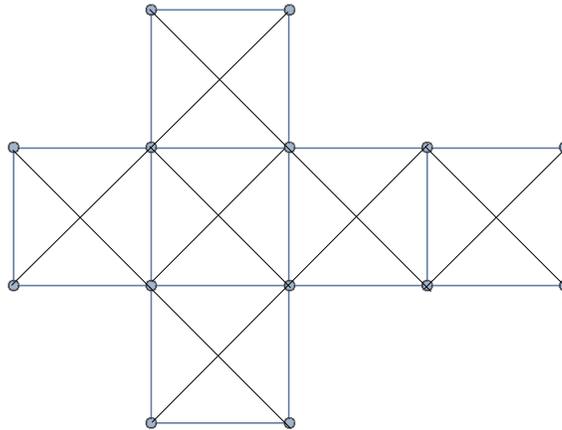
70

vise in triangoli rettangoli.



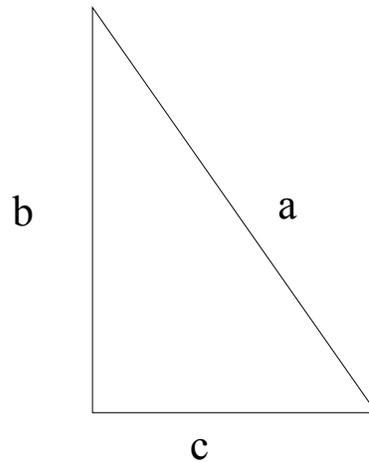
Nel caso del cubo e del dodecaedro le cose cambiano un poco.

I triangoli già ottenuti nel caso del cubo sono isosceli e di conseguenza otteniamo dei triangoli rettangoli isosceli tracciando anche l'altra diagonale.



Per quanto riguarda il dodecaedro sappiamo già che ogni sua faccia è divisibile in tre triangoli isosceli.

– Sia i triangoli rettangoli isosceli che i triangoli rettangoli scaleni hanno una fondamentale importanza strutturale-costruttiva. Tuttavia Platone attira subito l'attenzione su *un particolare tipo di triangolo rettangolo scaleno*. Esso risulta dalla divisione del rettangolo equilatero, e di conseguenza ha una caratteristica formale particolarmente notevole: la sua ipotenusa è esattamente il doppio del cateto minore.



– Per intenderci in breve, daremo a questo particolare triangolo rettangolo il nome di *triangolo platonico*. Ricorrendo al teorema di Pitagora non è difficile ricavare il rapporto tra i due cateti e il rapporto tra il cateto maggiore e l’ipotenusa. Essendo $a = 2c$ e dunque $c = a/2$, volendo esprimere il quadrato di b nel quadrato di c ci serviremo del teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 \\ b^2 &= (2c)^2 - c^2 = 4c^2 - c^2 = 3c^2 \end{aligned}$$

Di qui abbiamo la formulazione platonica secondo cui “il quadrato del lato maggiore è il triplo del quadrato del lato minore”

Volendo invece esprimere il quadrato di b nel quadrato di a , sostituiamo nell’equazione or ora ottenuta c con $a/2$ ottenendo

$$b^2 = 3 (a/2)^2 = 3 a^2/4 = 3/4 a^2$$

Avremo dunque come proprietà del triangolo platonico le proprietà conseguenti al fatto che l’ipotenusa è il doppio del cateto minore, e precisamente il quadrato del cateto maggiore è il triplo del quadrato del cateto minore (ovvero il quadrato del cateto minore è pari a $1/3$ del quadrato del cateto maggiore) e il quadra-

to del cateto maggiore è pari a $3/4$ del quadrato dell'ipotenusa (ovvero il quadrato del cateto minore è pari a $1/4$ del quadrato dell'ipotenusa)

La bellezza del triangolo platonico

– In realtà ci saremmo potuti limitare a ricordare la prima e più semplice caratteristica del triangolo platonico, quella che stabilisce che l'ipotenusa è il doppio del cateto minore. Ma un poco pedantesco abbiamo voluto ricavare anche gli altri rapporti e vi insistiamo un poco per una ragione molto precisa ed a mio avviso molto interessante.

– Platone osserva che tra gli infiniti triangoli scaleni generabili questo è il *più bello*, e dunque il più meritevole di essere preso in considerazione in rapporto ai solidi regolari. Questa circostanza viene normalmente riferita come una piccola curiosità nei commenti, senza dare ad essa soverchia importanza. Ad esempio, Taylor nota che Timeo non spiega “quale sia la peculiare bellezza di questi triangoli” ma, rifacendosi a commenti platonici più tardi, propone che essa dipenda dalla particolare semplicità dei rapporti tra le grandezze angolari del triangolo isoscele derivante dalla suddivisione del quadrato (che i pitagorici chiamavano semi-quadrato) e del triangolo rettangolo scaleno derivante dalla suddivisione del triangolo equilatero (che i pitagorici chiamavano “semi-triangolo”). (Taylor, 1968, p. 707). In effetti i gradi degli angoli del triangolo rettangolo isoscele in questione sono 45, 45, 90, dunque i loro rapporti 1:1:2, mentre quelli del triangolo scaleno sono 30, 60, 90 e i loro rapporti conseguentemente 1:2:3. Io credo che questa spiegazione sia piuttosto insignificante, anche se ha il merito di riferirsi alla tradizione antica dell'elogio dei numeri semplici. L'obiezione che si può fare tuttavia è che essa non sembra integrarsi nel discorso complessivo qui condotto. Inoltre qui ci si riferisce ad entrambi i tipi di triangoli,

mentre a quanto sembra in questo contesto viene chiamato in causa il solo triangolo rettangolo scaleno.

– Platone ha in mente qualcosa; ed insiste un poco sulla questione presentando le cose come una sorta di enigma che l'interlocutore è provocato a risolvere. È certamente questa la forma più bella – egli dice: «E se per la composizione di questi corpi qualcuno ce ne può dire una più bella, scelta da lui, egli vince non come nemico, ma come amico...» (54 a).

E poi, misteriosamente: «Dire il perché sia la forma più bella, sarebbe troppo lungo: ma a chi contraddice a questo, e trova che non è così, è riservata come premio la nostra amicizia» (54b).

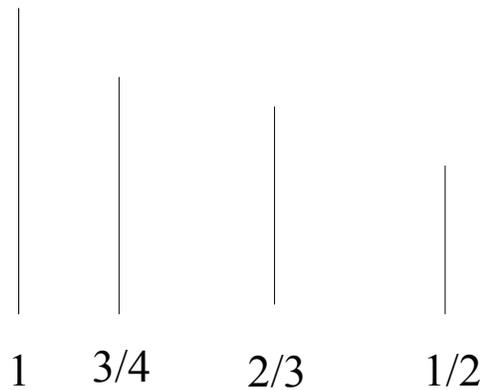
– Ora, considerando i rapporti precedentemente calcolati tra cateti ed ipotenusa del triangolo rettangolo scaleno credo di poter dare una *mia spiegazione* piuttosto precisa della “bellezza” del triangolo platonico, essendo anche certo che essa è così a portata di mano che sarebbe strano che non si trovasse per questa mia ipotesi un appoggio bibliografico.

– Intanto, in rapporto ad un filosofo come Platone, non è il caso di pensare che il “bello” debba essere colto con gli occhi, e che dunque si debba guardare il triangolo e giudicare se esso ci appaia più o meno bello. Dobbiamo piuttosto considerare la questione sotto il profilo dei rapporti. E precisamente assumendo il rapporto in certo senso costitutivo del triangolo platonico – cioè il rapporto del *doppio* che sussiste tra ipotenusa e cateto minore – associandolo al rapporto tra il quadrato del cateto maggiore rispetto all'ipotenusa ($3/4$) e al rapporto tra il quadrato del cateto minore rispetto a quello maggiore ($1/3$, di cui considereremo il complementare $2/3$) ed *interessandoci dell'aspetto puramente numerico* ne risulta la serie:

1 3/4 2/3 1/2

Forse ci si potrebbe limitare a notare la presenza in questi rapporti dei numeri 1, 2, 3, 4 – una successione che ha sempre avuto una grande importanza “numerologica” ribadendo l’idea dei numeri semplici che per di più sono i primi nella serie dei numeri.

Ma a mio avviso vi è una spiegazione più profonda che si comprende subito se riportiamo questi rapporti in rapporti tra *grandezze lineari*. Per chiarezza allora disegniamoli in questo modo:



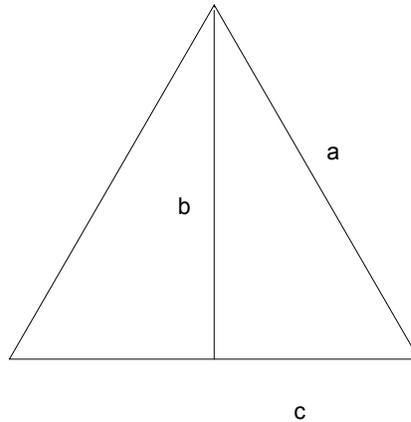
Questi rapporti sono di grandissima importanza musicale: riportati sulle corde faranno risuonare le consonanze perfette conosciute e celebrate dalla teoria musicale greca. Nell’ordine: suono di riferimento che corrisponde all’intero; in rapporto alla corda che è tre quarti della corda di riferimento avremo la quarta superiore al suono di riferimento, in rapporto a $2/3$ avremo la quinta superiore, infine l’ottava superiore.

– È mia convinzione, in altri termini, che la “bellezza” del triangolo elementare platonico sia da riportare ai rapporti musicali che sono leggibili in esso. Inoltre si tratta di una spiegazione coerente con l’impostazione di principio di Platone. Questi rapporti si ripresentano anche nella determinazione dell’anima del mondo (35a – Cfr. Giarratano, 1971, p. 383– 384, note 49– 50).

Il triangolo platonico e il triangolo equilatero

– Questo rimando musicale arricchisce sul piano simbolico–immaginario la scelta platonica in rapporto alla concezione delle materie primigenie e ribadisce su questo piano il nesso con i solidi regolari.

– Rammentiamo che le facce del tetraedro, dell’ottaedro e dell’icosaedro sono triangoli equilateri. Ora, come abbiamo visto nelle figure precedenti, il triangolo equilatero esibisce immediatamente la propria composizione in due triangoli platonici, al punto che *questa circostanza potrebbe essere impiegata nella definizione di triangolo platonico*. Infatti se noi tracciamo l’altezza di un triangolo equilatero – questa altezza divide il triangolo in due triangoli eguali in questo modo:



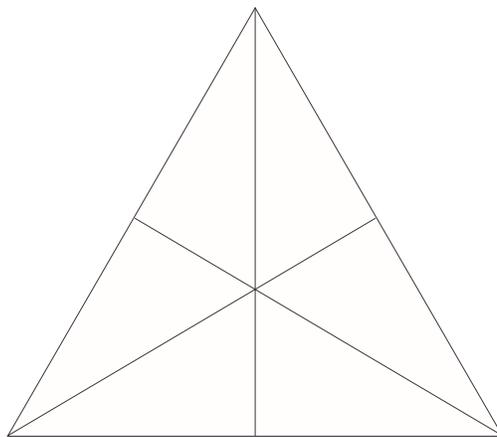
– Che l’ipotenusa sia il doppio del cateto minore nel triangolo abc risulta del tutto ovvio per il fatto che in un triangolo equilatero la linea perpendicolare tratta dal vertice al lato opposto (altezza) è una “mediana”, cioè essa termina nel punto medio del lato opposto, e questo lato è appunto eguale all’ipotenusa del triangolo abc .

– Di fatto per introdurre la nozione di triangolo rettangolo sca-

leno Platone impiega in primo luogo proprio la possibilità di produrlo “costruttivamente”, e quindi di usare questa possibilità come una sorta di definizione. In sostanza potremmo dire che chiamiamo triangolo platonico il triangolo rettangolo scaleno che risulta dalla suddivisione di un triangolo equilatero ovvero come Platone dice inversamente “quel triangolo che ripetuto forma un terzo triangolo che è equilatero”(54b).

– Ma Platone non si ferma a questo punto. La ricerca riguarda pur sempre gli “elementi” – espressione che implica una qualche forma di “indecomponibilità”, di suddivisione ultima. Cosicché ci si deve chiedere, e di fatto Platone si chiede, se non sia possibile, *mantenendo ferma l’idea che elemento ultimo sia in ogni caso sotto il profilo formale il triangolo rettangolo scaleno con le caratteristiche che abbiamo descritte*, procedere ad una suddivisione più fine.

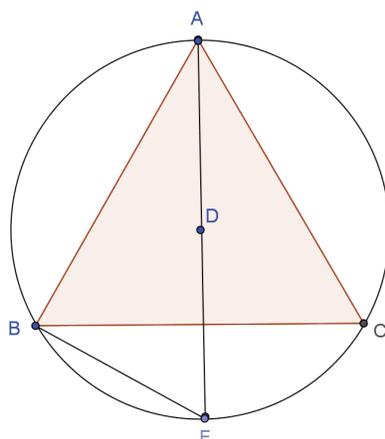
– E in effetti ci si rende così conto che in un triangolo equilatero sono contenuti non solo due triangoli platonici ma ben sei. La figura che *suggerisce* questa circostanza è la seguente, nella quale vengono tracciate tutte le altezze di un triangolo equilatero. Si rammenti che l’altezza, in un triangolo equilatero, coincide con la mediana – ovvero con il segmento che va da un vertice al punto medio del lato opposto.



– Abbiamo detto: la suggerisce – ed in effetti noi vediamo che qui il triangolo equilatero è suddiviso in sei triangoli, ma come faccio a sapere che si tratta proprio di triangoli platonici? Sarebbe davvero singolare il fatto che la forma di suddivisione di una mediana di un triangolo equilatero scaleno si ritrovi nei triangoli prodotti dall'intersezione di tutte le mediane. Ciò non è affatto ovvio, ed io non posso dire che ad occhio e croce le cose sembrano stare proprio così.

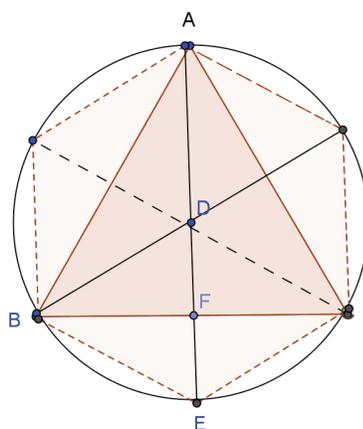
– In realtà vi sono due vie per mostrare che ciascuno dei sei triangoli che risultano da questa suddivisione è in effetti un triangolo platonico. Una via la potremmo chiamare *via dimostrativa*, e non la troviamo propriamente in Platone, ma la dobbiamo cercare tra i teoremi di Euclide.

– Anzitutto in un corollario della XV proposizione del libro IV, che tratta dell'esagono regolare iscritto in un cerchio. Nel corollario a questa proposizione si sancisce che il lato dell'esagono è eguale al raggio del cerchio circoscritto. Stabilito questo dobbiamo fare riferimento ad una parte di una dimostrazione del libro XIII, estraendola da una proposizione, la XII, che serve allo scopo e pur non avendo esattamente di mira il nostro problema, appartiene in ogni caso alle dimostrazioni preparatorie ai poliedri regolari. Il teorema in questione stabilisce che *se un triangolo equilatero è iscritto in un cerchio, il quadrato sul lato del triangolo è triplo del quadrato costruito sul raggio del cerchio*. Ma a noi interessa solo la costruzione iniziale. La figura di base è un triangolo ABC iscritto in un cerchio



Da A si prolunga il raggio AD sino ad E e si congiunge B con E. Essendo il triangolo ABC equilatero, il tratto di circonferenza BEC è pari ad un terzo della circonferenza e il tratto BE è pari a un sesto. BE è dunque lato di un esagono inscritto alla circonferenza e BE è eguale DE (in forza del corollario or ora ricordato).

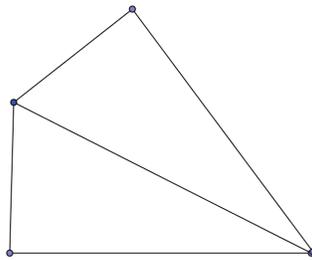
– A questo punto non ci serve altro se non argomentare sulla seguente figura che riprende la precedente



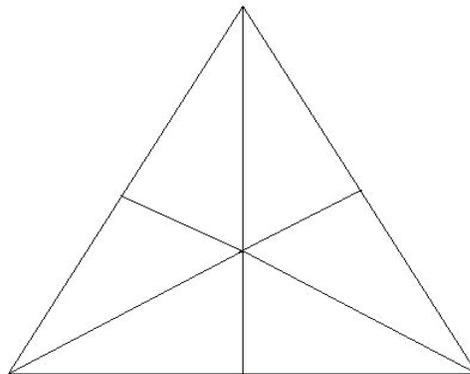
Essendo $BE = EF + FD$ ed essendo BD esso stesso raggio del cerchio circoscritto, il triangolo BD, BE, $EF + FD$ è equilatero, e tutti i triangoli interni al triangolo equilatero maggiore sono *triangoli platonici*.

– È chiaro a questo punto in che senso possiamo parlare qui di una *via dimostrativa*. Si mostra che il teorema è conseguenza di altre proposizioni precedentemente dimostrate. La figura vale qui solo come un ausilio aggiuntivo alle formulazioni verbali.

– Nel *Timeo* troviamo una diversa proposta che apparirà a tutta prima singolare. Platone propone di formare anzitutto un *quadrilatero* associando due *triangoli platonici attraverso le ipotenuse*, mostrando che attraverso la congiunzione di tre di questi quadrilateri si ottiene la formazione di un triangolo equilatero. In questo caso, in effetti più delle parole, valgono le figure. Il quadrilatero viene formato così:



Ora supponiamo di avere tre pezzi fatti così che possiamo rigirare a piacere. Il problema è di vedere se riusciamo a formare un triangolo equilatero. In effetti tutto il segreto sta nell'accostare tra loro i cateti più brevi.



Ogni lato del triangolo formato in questo modo risulta essere formato da due cateti lunghi – pertanto tutti i lati sono eguali ed il triangolo è equilatero. A questa costruzione fa riferimento esplicito Platone quando dice: «Se si compongono insieme due siffatti triangoli secondo la diagonale e questo si ripete tre volte di modo che le diagonali e i lati brevi convergano nello stesso punto, come in un centro, nasce di sei triangoli un solo triangolo equilatero» (54e).

(Parlando di diagonale si intende: “se si compongono insieme due triangoli secondo la loro ipotenusa in modo che questa formi la diagonale di un quadrilatero” – tenendo presente che con diagonale di un poligono si intende il segmento che connette due suoi vertici non consecutivi).

– Qui siamo in realtà molto distanti dalla via dimostrativa che abbiamo illustrato in precedenza, e siamo piuttosto in presenza di una via che potremmo chiamare *via costruttiva*: più precisamente, una “dimostrazione” viene effettuata, ma non nel senso di una concatenazione di proposizioni, di premesse e conseguenze, ma piuttosto in quello di indicare un metodo di costruzione da cui risulta *senz’altro* l’equilateralità del triangolo in questione.

– “Senz’altro” non vuol dire qui semplicemente “a vista”. Significa piuttosto che afferro che si tratta di un triangolo equilatero *sulla base del modo in cui è costruito*. Interviene qui quasi esclusivamente la comprensione del modo in cui la figura è costruita. *La figura stessa che vi propongo, nella regola della sua costruzione, rappresenta essa stessa la “dimostrazione”*.

– Wittgenstein si chiese una volta se una figura potesse fungere da dimostrazione. Oltre che lettore di libri gialli, egli era anche un attento lettore di Platone.

– Naturalmente vi è anche un'altra differenza. Mentre nel primo caso procedevamo dall'intero verso la parte e dimostravamo che la suddivisione effettuata portava effettivamente a parti che erano triangoli platonici, in questo caso noi procediamo dalla parte, il triangolo platonico e dimostriamo costruttivamente che è possibile formare un triangolo equilatero attraverso sei di essi. L'aspetto comune è in ogni caso quello del rapporto intero e parte.

– Sono costretto a prendermi la responsabilità della distinzione tra via dimostrativa e via costruttiva: nelle esposizioni correnti si fondono le due vie, senza rilevare la profonda e interessante differenza.

Le trasformazioni reciproche

– A questo punto possiamo ritornare ai nostri poliedri regolari, o più precisamente ai poliedri regolari che hanno come facce dei triangoli equilateri. Se ogni faccia equilatera può essere suddivisa in sei triangoli platonici, avremo una semplice regola per decidere quanti triangoli platonici ci vogliono per ciascun poliedro. Si tratterà di moltiplicare per sei il numero delle facce. Dunque:

fuoco = Tetraedro = 24 triangoli
 aria = Ottaedro = 48 triangoli
 acqua = Icosaedro = 120 triangoli

Ovviamente questa regola non vale per il cubo, dunque per la terra. Avendo facce quadrate, tirando le diagonali avremo per ogni faccia quattro triangoli isosceli – del triangolo equilatero proprio non se ne parla. Quindi in totale, essendo sei le facce, 24 triangoli isosceli. *Volenti o nolenti*, in Platone si deve ammettere questa “disomogeneità”, quindi si deve ammettere anche l'importanza, in rapporto alla geometrizzazione delle materie primigenie, del triangolo isoscele. Ma, come subito vedremo, con l'aiuto della fantasia mitica, faremo tesoro anche di questa “in-

congruenza” soprattutto in rapporto al problema della *trasformazione reciproca delle materie*.

– Come abbiamo accennato all’inizio, all’origine di tutto sta la domanda: come rendere conto del trapassare l’una nell’altra delle materie primigenie? In questo problema ne va di mezzo la loro reale essenza.

Intanto bisogna guardarsi dal ritenere che questa trasformazione sia affidata ad una sommatoria dei solidi come tali o ad una qualche loro composizione. In realtà lo studio secolare successivo dei solidi regolari ha portato alla luce delle straordinarie relazioni tra essi, basti rammentare la formula di Eulero che stabilisce una “caratteristica” aritmetica omogenea per essi secondo la quale per tutti i solidi regolari vale:

$$V(\text{vertici}) - S(\text{pigioli}) + F(\text{acce}) = 2$$

Ma vennero scoperte anche interessanti relazioni tra i solidi come entità geometriche. Ad esempio, tra il cubo e l’ottaedro – l’uno si può “trasformare” nell’altro congiungendo mediante segmenti il centro di ogni faccia del solido considerato. La stessa situazione si verifica nel caso dell’icosaedro e del dodecaedro. Questi rapporti hanno il loro corrispondente nell’inversione tra vertici e facce – avendo il cubo 8 vertici e 6 facce e l’ottaedro 6 vertici e 8 facce, analoga inversione si verifica per il dodecaedro (20 vertici e 12 facce) e l’icosaedro (12 vertici e 20 facce). E le relazioni notevoli tra i cinque corpi non finiscono qui, e riguardano ad esempio anche la possibilità di “combinarsi” variamente tra loro inscrivendosi l’uno nell’altro (Ghyka, 1977, cap. IV, in part. p. 41).

– Queste relazioni non erano note a Platone e d’altra parte facendo riferimento al quadro complessivo da lui delineato risulta piuttosto naturale interpretare il problema della trasformazione di una materia nell’altra non già per contatto o per divisione e qualche sorta di composizione dei solidi corrispondenti *ma per*

decomposizione nelle forme più elementari e nella ricomposizione di nuove forme a partire da esse. Il solido viene squadernato sul piano, e poi nuovamente ripiegato in un nuovo solido, utilizzando le parti triangolari necessarie. Così, constando l'ottaedro di 48 triangoli platonici con questi io potrò certamente costruire due tetraedri ciascuno dei quali consta di 24 triangoli platonici. Così l'aria *diventa* fuoco. Con ciò io tenderei anche a ribadire l'idea che il fulcro (e la specificità) della tematica platonica non sta solo nel richiamo ai poliedri regolari, ma soprattutto nell'idea della triangolazione.

– Del resto mi sembra che Platone sia piuttosto chiaro su questo punto: almeno per quanto riguarda il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro «essendo tutte [queste forme] derivate da un solo triangolo, dissolvendosi le più grandi, se ne formeranno molte piccole» e queste «possono costituire un'altra forma grande. E questo basti a proposito della reciproca trasformazione delle forme» [54d].

Il cubo, ovvero la terra

– Naturalmente Platone sottolinea fortemente che questa possibilità sussiste solo per i poliedri che hanno come facce dei triangoli equilateri.

Ecco la precisazione platonica che riguarda il cubo: «Ma ora occorre definire meglio quello che prima fu detto oscuramente. Ci pareva che tutte le quattro specie si generassero l'una dall'altra; ma questa non era una concezione esatta. In verità dai triangoli che abbiamo scelto [isoscele e scaleno] nascono quattro specie, ma tre da quel solo triangolo che ha i lati diseguali e la quarta è formata essa sola dal triangolo isoscele» [54c].

– Si tratta appunto del cubo. Platone si mostra assolutamente rigoroso e coerente nel concludere da questa circostanza che il cubo – ovvero la terra – ha una posizione particolare proprio in

ordine al problema della trasformazione. La terra, dice Platone, può certamente frantumarsi, sminuzzarsi, e quindi essere sottoposta a vari processi di redistribuzione, eventualmente proprio sotto l'azione delle altre materie come il fuoco, l'aria o l'acqua, ma è nello stesso tempo caratterizzata da una sorta di inconvertibilità, nel senso che dopo queste frantumazioni e spezzettamenti comunque resta sempre terra e non può trasformarsi in un'altra materia.

– «La terra, incontrandosi con il fuoco e disciolta dall'acutezza di esso, errerebbe qui e là, o sciolta nel fuoco stesso o nella massa dell'aria o dell'acqua, fino a che le sue parti incontrandosi non si riunissero di nuovo fra loro e ridivenissero terra: perché esse non potrebbero passare mai in altra specie» [56d].

– Una relazione geometrica ovvero l'impossibilità strutturale di costruire un cubo attraverso triangoli platonici diventa esplicativa di un discorso propriamente fisico. E questo è certamente un aspetto che illustra il senso complessivo dell'impostazione platonica. Naturalmente non si può pretendere che una simile impostazione sia limpida e chiara – ci sono difficoltà interpretative che non sono soltanto difficoltà di lettura del testo, ma anche di ordine concettuale; sono le difficoltà di un discorso che sa benissimo di essere arrischiato, e dopo essersi così seriamente addentrato nel territorio della geometria, quindi della conoscenza *pura*, avverte di essere ricacciato di continuo *in prossimità dell'immaginario*.

– Le considerazioni geometriche riconfluiscono in considerazioni fisiche che hanno una base puramente associativo-immaginativa. Come si è già rammentato, il cubo viene connesso alla terra rammentando la sua forma statica rispetto, ad esempio, ad un icosaedro o un ottaedro.

– «...la terra è la più difficile da muovere delle quattro specie ed è di tutti i corpi il più tenace» (55e).

– «Ora, dei triangoli posti da principio è più stabile naturalmente la base dei triangoli che hanno lati eguali piuttosto che lati diseguali. E la superficie equilatera quadrangolare [quadrato] composta da due triangoli isosceli è necessariamente più stabile, sia nelle parti che nella sua totalità, che una superficie triangolare» (55 e).

Fuoco aria acqua. Il pesante e il leggero

– Abbiamo parlato dell'*acutezza* del fuoco (56d), e dunque del suo carattere puntuto, tagliente, cosicché il tetraedro si presta in modo particolare all'associazione. Altre caratterizzazioni verranno a loro volta riportate alla struttura geometrica in un impiego arrischiato dei concetti e dei termini: così il tetraedro-fuoco sarà piccolo e leggero, mentre l'acqua-icosaedro sarà il corpo più grande e più pesante (oltre che meno "tagliente"). Ma che cosa significa qui *grande e piccolo, leggero e pesante*? Non si tratta forse di aggettivi che esigono il riferimento ai corpi? Non vi è qualche prossimità con la posizione democritea? In effetti almeno un punto sembra contenere un accenno molto netto ad un'*interpretazione corpuscolare*, come se le forme dei poliedri fossero *forme di atomi*. Anche in Democrito del resto la differenza di forma degli atomi aveva un'importanza nella determinazione delle differenze sensibili.

– «Tutti questi elementi — dice una volta Platone [56c] — bisogna concepirli così piccoli che nessuna delle singole parti di ciascuna specie possa essere veduta da noi per la sua piccolezza, ma riunendosene insieme molte, si vedano le loro masse».

– Qui la piccolezza sembra avere un senso fisico vero e proprio e

quindi ricordare in qualche modo la prospettiva filosofica dell'atomismo. Se così fosse le forme poliedriche sarebbero forme di corpuscoli. Ad esempio, l'acqua sarebbe un composto di microscopici icosaedri.

A mio avviso quel cenno ad una possibile interpretazione in questa direzione, che affiora nella citazione indicata, deve essere intesa come *una marginale deviazione di un corso di idee che punta in tutt'altra direzione*. Nello spirito complessivo del discorso platonico, la questione non è mai quella dell'indivisibile nel senso atomistico, del corpuscolo atomico. Gli *elementi* ultimi sono invece proprio i triangoli "platonici" – il problema dell'indivisibilità nel senso atomistico *non si pone nemmeno* così come non si pone *il problema di uno spazio inteso come vuoto* entro cui gli atomi, che sono veri e propri grumi minimi di materia, vagherebbero secondo la loro forma e il loro peso.

– Alla base della riflessione platonica vi è l'idea generale di una totalità indivisa su cui viene effettuata un'operazione di partizione triangolare. Di conseguenza il richiamo ai poliedri ha soprattutto il senso di un richiamo al sussistere di una rete di rapporti formali – cosa che rende conto anche della valenza simbolica dell'associazione. Detto in altro modo: quando associamo l'acqua all'icosaedro non vogliamo dire che essa è fatta di tanti piccoli icosaedri, tanto piccoli da essere invisibili (come sembra si dica appunto nella citazione precedente a cui vogliamo dare il significato di una esitazione che non ha seguito); quanto piuttosto che alla formazione sensibile "acqua" sottostanno una rete di rapporti ideali in base ai quali essa può entrare in relazione e interagire con gli altri elementi. Questi rapporti ideali sono eminentemente di ordine numerico e spaziale.

– Ciò che è in questione proprio *il numero dei triangoli costitutivi*: l'acqua è detta "pesante" perché consta di ben 120 triangoli elementari contro i 24 triangoli elementari di cui consta inve-

ce il fuoco; e per lo stesso motivo parleremo della grandezza dell'icosaedro e della piccolezza del tetraedro. Evidentemente, geometricamente parlando, piccolo e grande non hanno certo a che vedere con il numero delle facce; e tanto meno si può parlare in rapporto ad un oggetto “puramente” geometrico di un peso, e ancor meno riferendolo al numero delle facce. Si tratta di un ragionamento che certamente “non sta in piedi”, di un ragionamento misto, o come dice Platone, di un *ragionamento bastardo*. L'espressione è piuttosto forte ma la traduzione è in realtà strettamente aderente al testo.

Ragionamenti bastardi

– Il *pensiero bastardo* non sta solo prima del *pensiero puro* ma continua ostinatamente a sopravvivere accanto ad esso: talora come residuo che si oppone agli interessi della conoscenza, ma talaltra, al contrario, come stimolo e come elemento di vitalità che sa superare le lentezze di un pensiero troppo imbrigliato dall'idea della perfezione.

– L'espressione *ragionamento bastardo* viene talora mitigata nelle traduzioni, con metafore più deboli. Io penso invece che la si debba mantenere proprio per la sua forza provocatoria. Questa provocazione richiama molti problemi, che in parte sono strettamente attinenti a Platone, in parte vanno oltre l'orizzonte dei suoi problemi.

– Ciò che mi colpisce è da un lato la consapevolezza che Platone manifesta di fronte a ragionamenti di questo tipo – dall'altro il fatto che in ogni caso egli si assume la responsabilità del ragionamento bastardo, ed in questo modo riesce a formulare l'idea fondamentale di una legalità geometrico-matematica soggiacente ai fenomeni della natura che si ripresenta in forme nuove e decisive per la nascita della scienza moderna in età rinascimentale e postrinascimentale. Ma a parte Platone e il platonismo, quell'espressione ci pone alla presenza del problema di una ri-

flessione sugli intrecci tra ragionamento e immaginazione, sulle possibili differenze, sulle loro possibili forme di unità; sulla funzione dell'immaginazione nel processo di formazione dei concetti e naturalmente anche sul senso di una razionalizzazione come processo di purificazione e di depurazione dagli elementi mitico–immaginativi.

– Eppure siamo tentati di dire: non è forse tempo di dedicare un poco di attenzione *epistemologica* ai “concetti bastardi” per chiarire la funzione che essi *talora* svolgono nel processo della conoscenza? Essi non assolvono forse assai spesso la funzione di riempire delle lacune che non possono essere risolte con i mezzi di cui attualmente si dispone e riempiendo queste lacune consentono alla conoscenza di proseguire il suo corso? Non accade che attraverso il concetto bastardo si formulino ipotesi in un senso un po' speciale, e che anche questa funzione promuova il procedere della scienza? E addirittura che colgano, e forse non del tutto a caso, qualche particella di verità? D'altra parte la terra è stata immaginata rotonda prima che la si potesse *vedere* come tale.

– E per stare al nostro argomento, infine a me sembra straordinario che, attraverso ragionamenti bastardi, Platone o chi per lui non solo riesca ad associare il problema dei poliedri regolari alla tematica della sfera, ma soprattutto a quella della loro riduzione al piano e della triangolazione delle superfici. Il passaggio di fondamentale importanza, che mi sembra poco sottolineato nei commenti, è proprio quello della riconduzione al piano del solido. Duemiladuecento anni dopo, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), accingendosi a riformulare ed a generalizzare la caratteristica di Eulero, che abbiamo precedentemente citato, realizza anzitutto una “rimozione” di un faccia del poliedro e “appiattisce” poi il solido su questa faccia «ottenendo una figura piana fatta di parecchi poligoni contenuti in un contorno

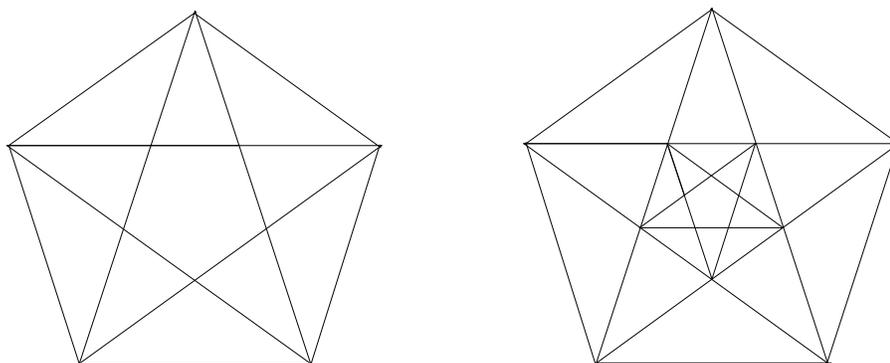
dato... dividendo poi il grafo in regioni triangolari aggiungendo diagonali a tutte le facce non triangolari». Questa operazione di Cauchy – che trova una esposizione chiara e competente nel bel libro di David S. Richeson (Richeson, 2008, cap. XII, pp. 112 sgg.) – viene considerata fra i primi passi verso l'elaborazione di un concetto topologico della superficie. Non mi sembra peraltro che nei commenti al *Timeo* questo riferimento sia particolarmente presente – sia pure con la giusta consapevolezza di una matematica che ha percorso più di duemila anni di storia.

Il dodecaedro ovvero della totalità

– Vi è un solido regolare di cui non abbiamo affatto parlato, se non di sfuggita all'inizio e proprio per metterlo da parte: il dodecaedro.

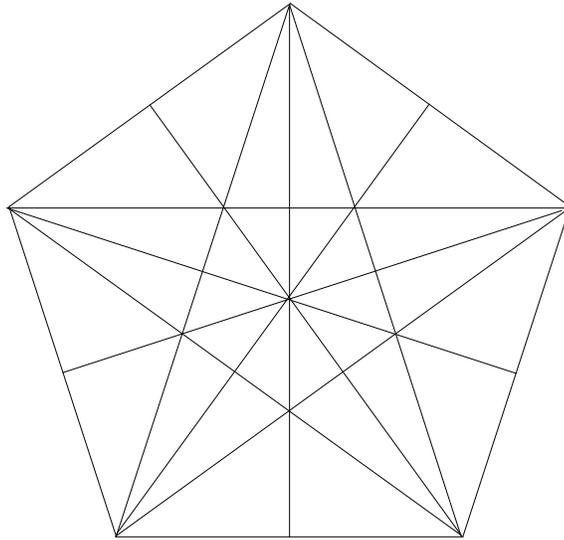
– In realtà alcune cose meritano proprio di essere dette. Come abbiamo notato all'inizio le materie primigenie sono quattro; i solidi regolari sono invece cinque. Uno di essi doveva restare escluso oppure avere una posizione a parte. Per di più il dodecaedro rappresenta a sua volta un caso speciale ed unico tra i solidi regolari. Le sue dodici facce sono pentagoni regolari. Naturalmente si possono effettuare triangolazioni in un pentagono, ma è impossibile realizzare una triangolazione in triangoli equilateri e conseguentemente in triangoli rettangoli scaleni del tipo previsto da Platone. Tuttavia il dodecaedro ci riserva qualche sorpresa.

– La prima sorpresa, che forse non è del tutto pertinente allo sviluppo del nostro tema principale, è il fatto che tracciando le diagonali del pentagono, nel suo interno otteniamo ciò che è stato chiamato pentagono stellato (detto anche pentalfa, pentagramma o triplon trigonon).



Ma all'interno della figura si ripresenta nuovamente il pentagono, e dunque tracciando le sue diagonali otterremo un nuovo pentagono stellato con all'interno di esso un nuovo pentagono, *sic ad infinitum*. La regola di costruzione – di cui ho trattato abbastanza a lungo altrove (Piana, 1999) – è in effetti una regola ricorsiva. Questo è un aspetto di grande interesse della figura che non era certo ignoto ai pitagorici, i cui “numeri figurati” hanno carattere ricorsivo. Ed è inutile dire che anche questo aspetto contribuì alla pregnanza simbolica della figura.

– Ma la seconda sorpresa, questa strettamente pertinente alla nostra discussione, è che vi è una modalità di suddivisione del pentagono che ci riporta al triangolo platonico: mentre nel caso del triangolo equilatero ottenevamo i sei triangoli platonici tracciando le altezze che coincidono in questo caso con le mediane, nel caso del dodecaedro possiamo ottenere i triangoli platonici usando sia le cinque mediane che congiungono un vertice con il punto medio dei lati opposti sia le cinque diagonali che congiungono vertici non consecutivi. La figura che ne risulta è la seguente:



In realtà si tratta di 30 triangoli platonici – ed essendo dodici le facce si giunge quindi a 360 triangoli (Boyer, 1995, p. 103). Un numero che converrà ricordare.

– Il dodecaedro non solo era noto ai primi pitagorici come poliedro regolare, insieme al cubo ed al tetraedro, ma aveva anche per essi, proprio per la ricchezza di relazioni che esibiva, un particolare valore simbolico al punto da diventare emblema della setta. E naturalmente non lo avevano trovato per strada. Si è costretti talvolta a difendere la speculazione filosofica da una malintesa empiria più di quanto sarebbe necessario persino a lume di buon senso. Così vi è chi attribuisce la conoscenza del dodecaedro da parte pitagorica all'esistenza di miniere di pirite in Sicilia «un minerale di zolfo che cristallizzandosi assume la forma del pentagono dodecaedro, che è un poliedro non regolare, ma con struttura del tutto analoga a quella del dodecaedro. Nel pentagono dodecaedro ciascuna delle dodici facce è un pentagono con quattro lati eguali tra loro e uno di diversa lunghezza. A parte questa leggera irregolarità il cristallo di pirite costituisce un ottimo modello in natura di un dodecaedro. L'osservazione di questa forma di cristallizzazione potrebbe aver suggerito ai

matematici della scuola di Pitagora l'idea di costruire un solido analogo, ma con tutte le caratteristiche della regolarità» (Gario, 1979). Anche Rivaud dà credito all'origine "empirica" e casuale del dodecaedro rammentando che non sono rare le pietre in forma di dodecaedro e che ciò spiegherebbe addirittura come mai questa forma era nota ai pitagorici, insieme al cubo ed al tetraedro, mentre l'ottaedro e l'icosaedro sarebbero una più tarda scoperta di Teeteto (Rivaud, 1985, p. 82).

– Fu così che, durante una passeggiata, in un caldo pomeriggio d'estate, un filosofo pitagorico vide sul sentiero polveroso un dodecaedro...

– Lasciando al loro destino queste favole, e occupandoci invece di favole cariche di filosofia, ritorniamo a Platone. Che cosa egli dice del dodecaedro? Egli dice semplicemente: «Restava una quinta combinazione e il dio se ne giovò per decorare l'universo» [55c].

– Sembra a tutta prima un brillantissimo *escamotage*: non sapendo come adattare questo solido "in più" all'interno della teoria, ecco che lo poniamo come una sorta di ghirlanda dell'universo! Molti commenti si accontentano di questa spiegazione. Ma in realtà le cose non stanno esattamente così – o meglio: se si tratta di un *escamotage*, esso è tuttavia ancora in grado di dirci qualcosa e di completare e di confermare il quadro teorico. Ciò su cui deve cadere l'accento infatti non è tanto l'idea dell'ornamento, ma il riferimento all'universo, cioè alla totalità stessa. In effetti il testo greco dice *to pan*, parla proprio del *tutto*, tradurre "l'universo" è tendenzialmente fuorviante. Distoglie l'attenzione dall'idea di trovare nel solido atipico un'immagine per la *totalità*. Mentre per ogni elemento viene individuato un singolo solido che viene pensato come suddiviso, il solido eccedente è portato a simbolizzare la totalità del mondo come totalità — rendendo

conto così anche della ricchezza di significato che la tradizione pitagorica (a cui Platone si sente spesso vicino) dava al pentagono e al dodecaedro stesso.

– Del resto vi è una discussione intorno alla traduzione del verbo greco ζωγραφεῖν che qui abbiamo reso con *decorare*, traduzione che è particolarmente frequente e che non si può dire erronea. Come osserva Kotrc, in un notevole saggio interamente dedicato al dodecaedro nel *Timeo*: «the basic meaning of ζωγραφεῖν is *to paint from life* (Republic, 598 B); an extension of this meaning is *to adorn* (as with paint)» (1981, p. 213). Ma lo stesso autore mostra in modo convincente con diverse citazioni interne ai testi platonici che lo stesso verbo può significare “delineare, tracciare i confini”, e che questa traduzione sarebbe più appropriata.

– In effetti con essa ci approssimiamo ancor più alla spiegazione che questa relazione in ogni caso richiede. Ancora una volta geometria e mito confluiscono insieme. Come i poligoni regolari possono essere inscritti in un cerchio, ed anzi da questa possibilità deriva un metodo per la loro costruzione, così i poliedri regolari possono essere inscritti in una sfera. Ora, come spiega Taylor, nel suo dettagliatissimo commento al *Timeo* «dei cinque solidi inscritti in una e medesima sfera, il dodecaedro ha il massimo volume e arriva quasi a coincidere con la sfera, oltre al fatto di esserle simile nella forma» (Taylor, 1928, pp. 377– 378). Altrove lo stesso Taylor rammenta che, secondo una concezione di origine pitagorica, «ai fini della descrizione astronomica si ripartiva la sfera celeste dividendola in dodici regioni pentagonali, proprio come una palla di cuoio si fa cucendo insieme dodici pezzi pentagonali di cuoio» (Taylor, 1968, p. 708).

– Infine: non vi è forse in quei 360 triangoli rettangoli scaleni un riferimento aritmetico che si ci riporta alla geometria della

circonferenza e della sfera come immagini della totalità? È infatti estremamente seducente pensare che in questo numero di 360 sia in qualche modo implicata la nozione di grado come misura degli archi – misura in realtà antichissima che risale ai babilonesi e che è nota anche in Grecia (intorno al 200 a.C.). Con idee come queste andiamo ancora una volta indiscutibilmente al di fuori della lettera del testo platonico. Non invece, a quanto sembra, dal suo spirito.

Nota: per le citazioni da Platone ci si è appoggiati alla traduzione francese di A. Rivaud, *Platon, Oeuvres Complètes*, Tome X. Les Belles Lettres, 1985, alla traduzione di C. Giarratano, Platone, *Opere complete*, vol VI, Laterza, Bari 1971 e di G. Reale, Platone, *Timeo*, Rusconi, Milano 1994.

IV

Sul numero e su altri argomenti

Incommensurabilità e numeri irrazionali

– Aritmetica e geometria non fanno tutt'uno? Tra l'una e l'altra vi sono diverse possibili interrelazioni. Questo richiede una chiara differenza che è sancita anzitutto *nel modo della loro origine*. Poi l'una e l'altra si incontrano variamente, e poi talora si separano...

– Ciò che spinge Dedekind ad una nuova definizione dei numeri irrazionali e quindi ad una ridefinizione di numero reale è, in particolare, la convinzione della necessità di liberare l'aritmetica dai riferimenti geometrici. In *Stetigkeit und irrationale Zahlen* egli scrive esplicitamente che un approccio attraverso «l'intuizione geometrica» al calcolo differenziale può essere «straordinariamente utile» da un punto di vista didattico, «ed anzi indispensabile, se non si vuol perdere troppo tempo». «Ma che questo modo di introdurre al calcolo differenziale non possa avanzare la pretesa di scientificità, non verrà negato da nessuno. Questo senso di

insoddisfazione era così forte, che io presi la ferma decisione di riflettere quanto fosse necessario per trovare una fondazione puramente aritmetica e pienamente rigorosa dell'analisi infinitesimale» (Dedekind, 1972, p. 4).

– Anche nella matematica greca, di fatto dominata dalla geometria, la scienza matematica per eccellenza era considerata l'aritmetica perché si riteneva che essa fosse meno compromessa con l'esperienza sensibile. D'altra parte, per comprendere questa estensione del campo dei numeri, l'origine geometrica del problema ha molto da insegnarci.

– L'incommensurabilità non sarebbe in alcun modo accessibile in un orizzonte di interessi dominato dalle pratiche di misura. La riduzione dell'unità di misura proseguirebbe infatti sino a quando il “resto” diventerebbe del tutto inapprezzabile. Di conseguenza, restando all'interno di quest'orizzonte, nulla di simile ad entità incommensurabili potrebbe essere nemmeno sospettato. Non a caso questa possibilità si affacciò invece all'interno di una concezione della matematica animata da interessi puramente speculativi, così ricca di episodi che mostrano la connessione tra un interesse “gratuito” per la soluzione dei problemi e la passione per l'argomentazione la cui origine sofistico-retorica è a sua volta significativa proprio per il fatto che – nell'atteggiamento di fondo della sofistica greca – non è tanto importante la tesi da dimostrare quanto il fatto che la si dimostri.

– In realtà l'idea dell'incommensurabilità è da parte a parte un prodotto di pura teoria, ed in particolare un'esemplare manifestazione della potenza teorica dell'ecceterazione. Così, in Euclide (libro X, proposizione seconda) si stabilisce che «Se di due grandezze diseguali veniamo a sottrarre, sempre e vicendevolmente, la minore dalla maggiore, quante volte sia possibile, e quella ogni volta restante non misura mai la grandezza ad essa precedente,

le grandezze saranno incommensurabili».

– Questo metodo di sottrazioni ricorsivamente iterate non può naturalmente valere come una sorta di suggerimento empirico per l'accertamento dell'incommensurabilità, perché i suoi primi passi debbono essere *pensati* come inizio di un processo che non può che proseguire all'infinito. Mentre il processo empirico-reale porterebbe indubbiamente alla sua chiusura.

– La tesi secondo cui l'idea dell'incommensurabilità è un prodotto di pura teoria, si può anche appoggiare a quanto dice A. Szabò (1978, pp. 199 sgg). Intanto egli insiste particolarmente sull'importanza che rivestono, proprio per la tematica delle proporzioni in genere e in particolare per la conoscenza degli incommensurabili, i tentativi «di dividere i più importanti intervalli musicali in sottointervalli eguali». Questo problema implicava quello della media proporzionale (= media geometrica) e portava in prossimità della questione dei rapporti tra i segmenti (le corde). Osserva tuttavia Szabò: «Non è comunque per nulla ovvio che una simile questione possa essere decisa per mezzo di metodi empirici» (p. 200). Facendo riferimento in particolare alla proposizione seconda del libro X di Euclide, egli osserva: «L'incommensurabilità è un concetto teorico; non è una proprietà empirica delle grandezze geometriche». «Quando i Greci scoprirono l'esistenza dell'incommensurabilità lineare, essi si confrontarono con un fatto matematico che non poteva essere provato conclusivamente con metodi pratici. Tali metodi servono in realtà per stabilire l'esatto opposto, cioè che due grandezze qualunque hanno una misura comune... Era necessario distogliere lo sguardo dall'evidenza visiva e rifiutare l'empirismo in matematica per provare che esistono grandezze incommensurabili» (ivi, p. 213).

– Questo tema si trova chiaramente formulato in Felix Klein,

come corollario della sua importante e netta distinzione della matematica in *matematica della precisione* (*Präzisionmathematik*) e *matematica dell'approssimazione* (*Approximationmathematik*). Questa distinzione, particolarmente importante nella prospettiva teorica di Klein e strettamente connessa con la tematica dell'applicazione (*Anwendung*), è introdotta nella sua *Elementarmathematik* (Klein, 1933, p. 39) da alcune considerazioni sulla spazialità intesa in un duplice senso come derivante da una *intuizione empirica dello spazio* oppure da una *intuizione interna, da una idea innata dello spazio*: quest'ultima nozione è una reminiscenza kantiana, ma il vero senso del discorso è il distinguere tra una nozione empirica dello spazio (e in generale di tutte quelle cose a cui la matematica è *applicabile*) ed una nozione ideale. La matematica della precisione si occuperà di stati di cose idealizzati – mentre la matematica dell'approssimazione si occuperà di stati di cose reali di cui si può dare una matematizzazione solo approssimativa. La matematica della precisione può servire ad approntare strumenti sempre più evoluti alla matematica dell'approssimazione – che è propriamente la matematica di cui «si ha bisogno». In questo contesto si precisa che il concetto di numero irrazionale «appartiene sicuramente solo alla matematica della precisione» e «per la praxis si può senza problemi sostituire i numeri irrazionali con numeri razionali» (ivi, p. 39).

Convenzioni ed evidenze

– Noi non sappiamo se l'evidenza c'è, ma siamo convinti che valga la pena di cercarla.

– Non ci svegliamo da un giorno all'altro dicendo: ora cambierò la convenzione. Vi è un complesso di ragioni che ci convincono ad una prova, a provare che cosa accade se cambio la convenzione. *Dopo tutto ciò, forse potrei tentare di vedere che cosa accade se assumo per un punto passi più di una parallela ad una retta data o nessuna..* Può

essere che in questo tentativo io mi arresti dopo qualche passo, per il semplice fatto che mi verrò a trovare ben presto in un vicolo cieco. Può essere invece che io trovi sempre più interessante il suo sviluppo. E si tratta di vedere che cosa esattamente mi impedisca di andare avanti; oppure che cosa vi sia di interessante negli sviluppi che eventualmente riuscissi a dare. Trarre dalla vicenda delle geometrie non euclidee delle conclusioni filosofiche generali senza tener conto delle particolarità di questa vicenda potrebbe essere fortemente fuorviante.

– Il vero problema non sta semplicemente nell’azione negativa, nel fatto di dire: potrei usare un’assunzione diversa, ma nel fatto che questo pensiero sorge nel quadro di una determinata problematica; e prosegue con nuovi problemi, ma in un contesto di arricchimento teoretico del tutto manifesto.

– Prendiamo a titolo di esempio semplice le regole per la potenza. Per convenzione, un numero n con esponente 0 è eguale a 1, tranne nel caso che in cui lo stesso n sia eguale a 0 (in tal caso l’elevazione a potenza resta indefinita). Ora prova a sostituire questa convenzione con un’altra qualsiasi, ad es. = 2. Forse ti arresterai subito.

– Talora è interessante fare una certa assunzione. Ma vi sono assunzioni possibili per le quali nessuno ha ancora trovato interesse...

– Il fatto è che, a differenza di ciò che talvolta ci viene insegnato, l’assunzione è per così dire una assunzione “condizionata” – *ex ante* ed *ex post*, se così si può dire, cioè è preceduta e seguita da condizioni. Bisogna vedere che cosa c’è prima e che cosa accade dopo. Bisogna vedere se un’assunzione è “interessante” o se non la è, e che cosa significa interessante, e le ragioni per cui diciamo che essa lo è. Inoltre vi sono regole implicite che entrano in ope-

ra quando si fa una nuova assunzione.

– Nella sua *Introduzione al pensiero matematico*, Waismann ha esposto molto acutamente l'intero problema del convenire e dell'assumere nell'aritmetica e quello delle condizioni delle assunzioni ricordando una regola esplicitamente formulata, la regola di Hankel: «La conservazione delle regole del calcolo orienta in maniera determinante la stessa determinazione dei concetti. Si tratta di una prima applicazione delle legge che Hankel chiamò *principio di permanenza delle regole del calcolo*. Essa può venire così formulata: se nella matematica si vuol generalizzare un concetto al di là della sua originaria definizione, bisogna scegliere tra tutti i modi possibili, quello che permette di conservare immutate le regole del calcolo nel più esteso numero dei casi. Questo principio di permanenza non è un'affermazione sulla cui validità si possa discutere, bensì un principio direttivo della formazione dei concetti» (1971, p. 40).

Ordine e concatenazione

– I numeri non possono essere messi in disordine. Forse questa è la proposizione fondamentale della filosofia del numero. Insieme a quest'altra: il numero non lo si può mettere in tasca (come il pastore il suo bastoncino con le tacche).

– Di fatto la stabilità dell'ordine deve essere richiesta perché una serie empirica possa funzionare come serie numerica. Nel caso della serie empirica la stabilità non fa altro che “imitare” un ordine essenziale, o forse meglio: fa presentire o prepara il passaggio ad un ordine intrinseco, necessario, alla serie numerica vera e propria.

– L'interesse della posizione di Wittgenstein (nel *Tractatus*) è quello di mostrare, spostando tutto il problema sul piano forma-

le notazionale, la possibilità di fondare il concetto stesso di numero sull'idea dell'iterazione, cosicché il numero compare come un vero e proprio contatore di operazioni.

– Wittgenstein evita l'intero percorso della storia fenomenologica del *concetto* di numero per iniziare da subito dal livello segnico.

– Vi è una giustificazione per il fatto che si chiamano numeri anche le cifre: non si tratta di un uso equivoco del termine. Anche se naturalmente il significato è differente.

– Ifrah caratterizza un calcolo o un algoritmo come «ogni procedimento matematico consistente nel passare automaticamente, in stretta concatenazione, da una fase alla fase successiva»: questa definizione appare subito di carattere molto generale, e dunque non obbligatoriamente connessa ai “numeri”, ma certamente con il problema di un'operazione che produce serie intrinsecamente ordinate, e conseguentemente con il problema della produzione dei numeri (Ifrah, 1989, p. 267).

– Concepire una curva come generata dalla sezione di un cono (o da una particolare rotazione ecc.) è qualcosa di assai diverso che concepirla come rappresentazione figurale di una funzione.

– Il moderno calcolatore celebra i fasti dell'aritmetica discreta, e si potrebbe sostenere come un fecondo paradosso – ma non so dire fino a che punto lo sia – che l'intera analisi, i numeri irrazionali, i numeri cantoriani, ecc., quando sono manipolabili al calcolatore, siano *finzioni* che abili informatici propongono ai matematici.

Simbolismi

– Al posto dello zero si poneva una volta uno spazio vuoto. L'importanza dello zero nel simbolismo. Non si tratta di ragio-

nare sul concetto del vuoto, per vedere se questo è più o meno accettabile! O di porre il vuoto come qualcosa di simile ad una esigenza logica. Si tratta di vedere quali vantaggi io ottenga introducendo il segno “0”.

– La posizione straordinaria della matematica in genere è proprio la capacità di unire pensiero e immaginazione (l’insieme infinito è un abisso, diceva Cantor): la massima astrazione ed il concreto come concreto: il balzo dall’insieme infinito al simbolo omega.

– Weierstrass: «Un matematico che non abbia un po’ del poeta non può essere un perfetto matematico» (Bell, 1966, p. VII).

– La parola “simbolizzazione” può essere intesa nel senso di una base segnico-materiale per un significato che sta oltre di essa. Si tratta di una nozione in parte ovvia in parte no.

Ad esempio questo grafema

sia inteso come retta infinita. Esso è allora un simbolo? Che senso ha questo termine ora? Potremmo fare a meno di questo segno per “concepire” l’idea di retta infinita?

– Possono darsi idee astratte che non solo non siano di fatto simbolizzate, ma che *non possano* addirittura esserlo?

– La distinguibilità e l’evidenza percettiva, ovvero intuitiva hanno una funzione assolutamente fondamentale in rapporto al problema della notazione e quindi del simbolismo aritmetico in genere.

– È possibile che nell’invenzione di metodi notazionali per il numero si prendano le mosse da difficoltà di ordine pratico, ma

la soluzione di queste difficoltà è ricca di implicazioni teoriche estremamente rilevanti. Secondo la soluzione data a queste difficoltà l'aritmetica ha potuto trarre vantaggio o grave svantaggio. In altri termini il *pensiero* del numero è stato messo in moto dalla pratica dei numeri (*cifre*) e la riflessione aritmetica è sempre stata intrecciata con la riflessione sui simbolismi possibili.

– Il vantaggio della notazione posizionale arabo-indiana (nella quale il significato da dare ad un numero rispetto alla base è determinato dalla sua posizione all'interno della cifra) non è costituito soltanto dalla sua grande concisione e dalla sua chiarezza, ma soprattutto dalla possibilità di operare calcoli direttamente sulle cifre, e dunque sui nomi dei numeri, *e non su mere molteplicità*.

– Noi siamo talmente abituati ad operare in questo modo che ci sfugge ormai la portata e l'importanza di questa circostanza. Occorre allora rammentare che per millenni *il nome del numero è stato separato dal calcolo*. Il calcolo vero e proprio era affidato per lo più a complicati pallottolieri, di varie fogge ed a volte particolarmente ingegnosi che consentivano di effettuare calcoli con numeri anche molto elevati. Ma per quanto ingegnosi possano essere i metodi di lavoro al pallottoliere, il calcolo al pallottoliere resta legato alla manipolazione diretta di molteplicità. Specialista del pallottoliere era appunto il contabile, che apparteneva ad una casta privilegiata proprio per la capacità di impiegare i pallottolieri. La cifra, ovvero il nome del numero, serviva per lo più per registrare in una scrittura il risultato del calcolo o i suoi termini iniziali. Naturalmente la notazione posizionale non nasce dal nulla, ma cresce da determinati modi di impiego dei pallottolieri e dal trasferimento dei loro risultati in forma di notazione attraverso segni. «Delle marche mobili, dei sassolini, delle palline, ecc., possono essere poste in numero sufficiente all'interno di ambiti spaziali delimitati in maniera fissa (in colonne o su bastoncini). Tali ambiti hanno un ordine stabile; le marche nella prima fila sono indicano un uno per ciascuna, le

marche nella seconda fila indicano le decine, ecc. Ogni ripartizione delle marche nelle colonne espone dunque un numero in base dieci in forma rigorosamente articolata. Con ciò si rimedia per l'essenziale alla mancanza di una designazione verbale o in cifre. Con questi semplici dispositivi, la cui invenzione naturalmente presuppone una chiara visione del principio che sorregge il sistema numerico, viene così creata una designazione decimale sistematica, artificiale e rigorosa» (Husserl, 1970, p. 319-320).

– Con il diffondersi della notazione posizionale la pratica dei calcoli diventa sempre più una pratica di manipolazione delle cifre, cioè una pratica di trasformazione secondo regole di configurazioni segniche.

Logica e linguaggio corrente

– La logica moderna si apre con esorcismi sul linguaggio corrente. «Gran parte del lavoro del filosofo consiste – o dovrebbe consistere – in una lotta contro la lingua» (Frege, 1986, p. 416). «Si comprende di qui con quale facilità la lingua ci seduce in false concezioni e quale importanza possa avere per la filosofia il sottrarsi al dominio della lingua. Quando si cerca di edificare un sistema di segni su fondamenta e con strumenti completamente diversi, come ho fatto io con la mia *Begriffsschrift*, si va, per così dire, a sbattere il naso contro le false analogie della lingua» (ivi, pp. 154– 155).

– La ricerca di Peano di un nuovo simbolismo è certo dovuta all'intenzione di allontanarsi al massimo dai pericoli concettuali che si presume siano contenuti nel linguaggio comune. Scrive Klein che il libro di Peano *Aritmetices Principia nova methodo exposita* «è scritto in un peculiare linguaggio simbolico destinato secondo gli intenti dell'autore a mostrare ogni passo logico della dimostrazione mettendolo in rilievo come tale. Peano vuole garantirsi

in questo modo che venga fatto uso solo del principio che egli menziona specificamente, liberato da qualunque cosa che possa derivare dall'intuizione. Egli desidera evitare l'insinuarsi, usando il linguaggio ordinario, di innumerevoli incontrollabili associazioni di idee e residui della percezione» (Klein, 1933, p. 13). È difficile peraltro negare che vi sia un nesso tra l'invenzione di simbolismi logico-matematici – che è ovviamente profondamente giustificata – e le idee di riforma del linguaggio corrente che induce lo stesso Peano a impastrocchiarsi con il *Latino sine flexione*, esteso poi ad un *italiano sine grammatica*, di cui mi sembra istruttivo fornire un piccolo esempio:

– «Grammatica tormento de pueritia, es quasi semper inutile. Nos considera, per exemplo, italiano:

Io scrivo. Tu leggi. Noi abbiamo una lingua e due orecchi. La lingua internazionale ieri era un'utopia, domani sarà la verità.

Scribe omne vocabulo sub forma citato in vocabulario, et supprime elementos inutile; resulta italiano sine grammatica:

Io scrivere. Tu leggere. Noi avere uno lingua e due orecchio. Lingua internazionale ieri essere utopia, domani essere verità» (Peano, 1958, p. 492).

– È inutile nascondersi dietro un dito. Si tratta di un progetto aberrante, adottato, oltre che da Peano, soltanto da Tarzan. Beninteso, questo progetto che Peano coltiva con molta serietà, non toglie nulla alla grandezza del matematico e del logico. Dimostra soltanto una profonda insensibilità per la storicità ed io sarei portato ad aggiungere, per la bellezza della lingua; ma anche – in realtà, e questo appare assai più singolare – verso la logica interna implicata nella sua grammatica. Certo, la flessione non è obbligatoria, ma quando non lo è, ciò è frutto di un'evoluzione significativa, e non di un artificialismo studiato a tavolino.

– «Se avessimo una lingua logicamente perfetta forse non avrem-

mo più bisogno della logica e potremmo leggerla dalla lingua. Ma da ciò siamo ben lontani. Il lavoro logico è proprio in gran parte una lotta contro i difetti logici della lingua, che però, a sua volta, è uno strumento indispensabile per noi. Solo dopo aver portato a termine il nostro lavoro logico avremo a disposizione uno strumento più perfetto» (Frege, 1986, p. 395).

– Wittgenstein, nel *Tractatus*: «Il linguaggio traveste i pensieri. E precisamente così che dalla forma esteriore dell'abito non si può concludere alla forma del pensiero rivestito; perché la forma esteriore dell'abito è formata per ben altri scopi che quello di far riconoscere la forma del corpo» (prop. 4.002). Più tardi, certamente vi è un mutamento di prospettiva, che rende il discorso di Wittgenstein sul linguaggio e sulla logica assai più complesso e interessante (cfr. Piana, 1913).

Numero e tempo

– Forse proprio l'idea di una necessità nell'ordine di successione ha così persistentemente suggerito alla speculazione filosofica di orientare l'attenzione, per ciò che riguarda il problema dell'origine del numero, in direzione della tematica temporale. Questo legame è presente nella filosofia kantiana ma si ripresenta fino a tempi più recenti ed in particolare nella tendenza intuizionistica nell'ambito della filosofia della matematica. È indubbiamente possibile pensare, senza entrare nel contenuto di quelle concezioni, che il primo suggerimento possa derivare proprio dall'immagine di ordine inesorabile che potrebbe venire dall'idea del prima e del dopo, dall'idea della “successione temporale” intesa non come pura giustapposizione di istanti, ma come un procedere necessario nel quale l'istante successivo è per così dire un portato di quello precedente, una sorta di suo prolungamento necessario, e quindi ha nel precedente il suo necessario presupposto.

– Le nostre considerazioni tuttavia non avvicinano affatto ad

una simile prospettiva ma se mai si allontanano da essa. La ragione di ciò sta proprio nel fatto che l'accento non deve cadere su un ordine necessario genericamente inteso, o eventualmente da cogliere in una riflessione filosofica che abbandona più o meno momentaneamente il contesto di discorso che caratterizza il problema del numero per riprenderlo poi dopo una scorribanda speculativa sulla forma temporale, ma sul tema soggiacente della ripetizione e dell'iterazione della regola. Proprio questo aspetto non è certo a portata di mano nella problematica temporale: l'ordinamento intrinseco della successione temporale non è in grado di per se stesso di generare oggettività intrinsecamente ordinate, ma esso rimane per così dire senza alcun effetto interamente *a parte subiecti*. Esso si consuma mentre scorre, si volatilizza. L'ordine temporale necessario delle nostre azioni non garantisce nulla sull'ordine eventuale dei loro risultati. Ed anche come immagine, quest'ordine è fuorviante proprio per il fatto che nasconde il punto realmente importante – e cioè *l'implicazione reciproca degli elementi della "successione" in quanto sono costruiti attraverso l'applicazione iterata di una regola*.

– Inoltre il tema della temporalità qualora lo si voglia connettere a quello di operazione non può fare altro che proporre la nozione di operazione come una operazione che *prende tempo*, con un vincolo alla concretezza che proprio ora, quando cerchiamo di spiccare il volo verso una dimensione astratta, sembra particolarmente urtante. Parlando di un modo in cui la serie è costruita secondo il quale un elemento della serie è il presupposto necessario dell'elemento successivo, vogliamo affermare che quello deve essere costruito *prima* di questo, ma "prima" non ha affatto un significato di precedenza *temporale*, ma anzitutto di precedenza *logico-strutturale*. Il terzo elemento presuppone il secondo in quanto questo è la base della sua generazione ed al suo essere appartiene anche il luogo in cui si trova. *Esso non è stato preso da un mucchio, e messo in un ordine. Cosicché non può nemmeno essere estratto*

dall'ordine e rimesso nel mucchio. Appartiene invece alla serie come un anello di una catena che non può avere nessuna esistenza autonoma rispetto alla catena stessa.

Rigore

– Per secoli gli *Elementi* di Euclide sono stati un modello incontrastato di rigore deduttivo. Eppure Leibniz nutriva dubbi proprio su questo aspetto e riteneva che essi richiedessero una vera e propria riscrittura. Un aspetto di quello che Leibniz chiamava *Analysis situs* riguarda proprio questo problema. In un frammento pubblicato da Couturat, egli scrive: «L'ordine delle proposizioni deve essere matematico, eppure diverso da quello euclideo. I geometri, infatti, fanno accuratamente le loro dimostrazioni, ma invece di illuminare la mente (*animus*), la costringono: certamente, ottengono un maggiore rispetto estorcendo il lettore il suo assenso e conquistandolo con sottigliezza inattesa, ma non si curano abbastanza della memoria e dell'intelligenza del lettore, perché in qualche modo nascondono i motivi e le cause naturali delle loro conclusioni, cosicché non è facile riconoscere il modo in cui hanno ottenuto le loro scoperte. Al contrario, in ogni disciplina questo è in realtà la cosa più importante: riconoscere non solo i risultati e le loro manifestazioni, ma anche l'origine di tali risultati, e solo questo si deve ricordare perché di qui tutto il resto può essere dedotto per mezzo dell'abilità di ognuno. Pertanto debbono essere congiunti la luce dell'invenzione (*inventionis lux*) e il rigore della dimostrazione (*demonstrandi rigor*) e gli elementi di qualsiasi disciplina debbono essere scritti in modo tale che il discepolo o il lettore può sempre vedere la connessione e simile ad un compagno nell'invenzione, sembri non tanto seguire il Maestro, quanto camminare con lui ...» (Leibniz 1903, p. 33).

– *Inventionis lux et demonstrandi rigor.* non si poteva dire meglio. ed

in queste perplessità critiche, riferite peraltro ad ogni disciplina, possiamo cogliere una portata che va oltre il problema specifico che stiamo discutendo, investendo un atteggiamento ancora oggi largamente presente, che tiene ben poco conto dell'*inventio-nis lux*, a vantaggio di un cieco *demonstrandi rigor*, in cui l'allievo, in luogo di camminare con il maestro, lo imita pedissequamente.

– Siamo tentati di mettere quest'osservazione di Leibniz in parallelo con la posizione sulla geometria euclidea di un autore apparentemente molto lontano da lui. In essa, osserva Arthur Schopenhauer, la *convictio* prevale sulla *cognitio*: dove il termine di *convictio* «non indica in realtà un'opinione di cui in un modo o nell'altro abbiamo acquisito una certezza soggettiva (*Überzeugung*): esso è invece tratto dal linguaggio giuridico per indicare quel complesso di considerazioni, che possono diventare vere e proprie stringenti argomentazioni con il quale un giudice istruttore *mette con le spalle al muro* un imputato, e in questo senso lo *convince* della sua colpa. Lo convince, ovvero gli mostra che non vi sono per lui vie di uscita, che tutto confluisce coerentemente, logicamente, nell'indicarlo come autore del delitto» (Piana, 1990, p. 315). Mentre la *cognitio* è l'effettiva *apprensione dell'evidenza di una connessione*. «Nel § 15 del Primo libro del *Mondo come volontà e rappresentazione* Schopenhauer osserva, avendo di mira soprattutto le dimostrazioni euclidee per assurdo, che per quanto 'il modo in cui Euclide applica il suo processo meriti tutta l'ammirazione che i secoli gli consacrarono', tuttavia questo metodo opera uno stravolgimento, perché tende a sostituire ad ogni evidenza intuitiva immediata un'evidenza puramente logica» (ivi, p. 317). «Solo entrando nell'ordine di idee proposto da Kant si comprende come il problema dello statuto delle proposizioni geometriche debba essere interamente riconsiderato ridando all'intuizione l'importanza che essa ha in rapporto ad esse. In questo modo possiamo andare oltre quello che, secondo Schopenhauer, è il limite maggiore delle dimostrazioni geometriche, cioè quello di indicare che

le cose stanno così e così, senza indicarne il perché. Ci veniamo così a trovare nei panni di ‘colui al quale si fanno vedere i diversi effetti della macchina, senza permettergli di osservarne l’interno meccanismo e i congegni’. Le dimostrazioni assomigliano a ‘giochi di prestigio’ – e più di tutte assomigliano a giochi di prestigio le dimostrazioni ‘apagogiche’ – cioè le dimostrazioni nelle quali la verità della tesi da dimostrare verrebbe provata provando la falsità della sua negativa. ‘Qui sembra si proceda realmente a puro rigore di logica – una simile dimostrazione chiude l’una dopo l’altra tutte le porte, non lasciandone aperta che una sola, per la quale dobbiamo passare per quest’unico motivo che è la sola rimasta aperta’. Si tratta di un’immagine assai simile a quella delle *spalle al muro*. Entrambe le immagini confluiscono nell’istanza di una *convictio* che possa essere accompagnata da una *cognitio*» (ivi, p. 318).

– Nella *cognitio* di cui parla Schopenhauer possiamo, io credo, cogliere almeno un aspetto importante della *lux inventionis* di cui parla Leibniz: ma la via tanto nettamente intuizionistica di derivazione kantiana di Schopenhauer tende a indebolire fortemente il *rigor demonstrandi*, mentre in questa relazione e opposizione troviamo un’ulteriore formulazione possibile della tensione che rende tanto movimentato il pensiero leibniziano.

– In realtà nella storia della matematica, gli intenti rigorizzatrici non sono portatori soltanto di una maggiore esattezza e precisione, ma conducono spesso a nuove invenzioni matematiche. Anche Poincaré, che distingue nettamente tra una intelligenza “logica e analitica” ed un altro tipo di intelligenza che si può caratterizzare come “intuitiva e geometrica”, dopo aver insistito che l’invenzione sta soprattutto su questo secondo versante, sottolinea che «anche gli analisti sono stati inventori» (anche se poco dopo aggiunge: «ma ve ne sono pochi») (1994, p. 25). Forse in tempi più recenti, con l’exasperazione della tendenza al rigore questa creatività si è indebolita e, soprattutto nella logica, si è

fatta avanti una tendenza puramente “decorativa”. Si ricorre così a complicate elucubrazioni ed arzigogolati simbolismi per dire cose che si possono dire, addirittura più chiaramente, nel linguaggio di tutti i giorni. Chiamo *decorativo* un simbolismo quando esso è superfluo e viene introdotto unicamente per suscitare una parvenza di rigore.

– I matematici creativi non amano un rigore puramente decorativo e sono ricchi di immaginazione. «Sono profondamente convinto che l’astrazione forzata, il risalto attribuito all’ ‘elaborazione formale’ e la proliferazione di concetti e di termini, molte volte facciano più male che bene» (Mandelbrot, 1987, p. 13).

– Talvolta il matematico prosegue il proprio lavoro accettando le suggestioni che provengono dai suoi algoritmi anche se nutre dubbi sulla loro natura e i loro fondamenti. La storia dei numeri immaginari insegna: malgrado i dubbi «si continuò a proseguire i calcoli con le radici di numeri negativi come con le radici solite. Si tratta di un momento critico che occupa un posto di primissimo ordine nella storia delle matematiche: sembra che proprio nell’operare con formule, cioè nell’algoritmo matematico stesso, si celi una forza autonoma che ci spinge innanzi nostro malgrado, forza che nel caso considerato portò i matematici a far uso dei numeri immaginari. E tutto ciò con estremo vantaggio della matematica, perché la pretesa pedante di una dimostrazione rigorosa avrebbe invece paralizzato ogni ulteriore sviluppo. Per fortuna i matematici di quel tempo non si preoccuparono troppo di un’analisi logica sottile» (Waismann, 1971, p. 23).

– Frege dice una volta che nella storia della matematica il rigore viene per ultimo. Ed è singolare come non si renda conto che questa affermazione ha delle implicazioni piuttosto serie. Egli dice propriamente: «Un principiante, cui si insegnino i primi rudimenti di matematica nella forma logicamente più rigorosa, li

troverà per lo più innaturali, e ciò proprio a causa del rigore logico. La conseguenza è che l'insegnamento viene compreso imperfettamente o per niente. Bisogna pertanto in un primo tempo rilassare un po' il rigore e cercare di risvegliarne il bisogno gradatamente. Anche nella storia della matematica troviamo che il massimo rigore è conseguito sempre da ultimo» (Frege, 1986, p. 74. Cfr. anche p. 256). Ciò implica che il rigore avviene *a cose fatte*, e se così fosse vi è da chiedersi se esso abbia realmente a che fare con la creatività matematica. Cosa che io credo, e che la frase di Frege invece fa dubitare.

– Osserva Felix Klein che il punto di vista assiomatico – che si appoggia all'autorità di Euclide – «tuttavia non corrisponde al divenire storico della matematica stessa». Egli propone in proposito una bellissima immagine: la matematica si sviluppa come un albero che non cresce semplicemente verso l'alto verso ramificazioni sempre più fini – ma nella stessa misura in cui si diffonde verso l'alto, così si spinge sempre più a fondo verso il basso, nelle sue radici. Ciò significa che la riflessione sui principi si approfondisce man mano con cui avvengono gli ampliamenti del pensiero matematico. Il punto di vista assiomatico propone il problema in tutt'altra maniera. In particolare secondo questo punto di vista si prospetta uno sbarramento, per così dire, verso il basso (le radici dell'albero) e una compiutezza che sono contrari al divenire concreto della matematica (Klein, 1933 p. 16).

Teoria e storia

– «Ora chiamiamo numeri cose che una volta non avremmo chiamate così. Ma allora la nostra preoccupazione fondamentale deve essere quella di trovare una nuova definizione, perché solo da essa quella estensione può essere resa legittima. Nello stesso tempo, la nuova definizione non potrà essere intesa come una sorta di adeguazione al *movimento del concetto*: il numero infatti, in

se stesso, non ha alcun movimento – ma la nuova definizione non farebbe altro che sostituire una definizione sbagliata con una definizione giusta. Secondo un simile atteggiamento la storia della matematica non potrà rappresentare il farsi della matematica stessa, ma la vicenda terrena in cui l’universo matematico, nella sua compiuta perfezione, imperfettamente si rivela» (Piana, 1967, p. 282).

– Se il movimento del concetto è privo di interesse, allora l’intera storia della matematica è dal punto di vista epistemologico, del tutto irrilevante. In essa non vi è nulla da apprendere sul contenuto del concetto.

– Di questa irrilevanza ne fa fede in modo esplicito Gottlob Frege: «Ovviamente un simile resoconto di come si sia giunti a ritenere vero qualcosa non costituisce una dimostrazione; anche nella scienza la storia della scoperta di una legge matematica o naturale non può surrogare la fondazione giustificante. Quest’ultima sarà sempre storica; sarà irrilevante sapere chi ci ha pensato per primo, che cosa ha dato lo spunto ad un sì brillante ragionamento e quando e dove il tutto abbia avuto luogo» (Frege, 1986, p. 69). Evidentemente Frege ha una concezione miserrima della storia della matematica.

– “... divenendo rigorosa, la scienza matematica prende un carattere artificiale che colpirà tutti; essa dimentica le sue origini storiche; si vede come le questioni possano risolversi, ma non si vede più come e perché sorgano” (Poincaré, 1994, p. 20). Ed invece è necessario vederlo: in questo “perché” sta spesso il loro senso irrinunciabile.

– L’esergo della *History of Mathematics* di Florian Cajori dice: “Io sono certo che non vi sia argomento che ci rimetta maggiormente della matematica se si tenta di dissociarla dalla sua storia”

(Cajori, 1894) Aggiungo che naturalmente non è l'aneddotica che interessa, ma il fatto che attraverso la storia si colgono le vicissitudini del concetto, e dunque i suoi problemi, mentre è una tendenza molto diffusa tacere su quelle vicissitudini, ricche di senso, e fornire il risultato, possibilmente nella sua versione più aggiornata e (apparentemente) priva di problemi.

– In un notevole saggio del 1897 intitolato *Sull'importanza relativa alle ricerche sulla storia delle scienze*, Giovanni Vailati fa giustamente risalire la tendenza a trascurare questa importanza quando aveva un precisa giustificazione, ovvero alla polemica di Galilei contro l'aristotelismo rammentando la frase: “Però, signor Simplicio, venite pure con le ragioni e con le dimostrazioni *vostre*, o di *Aristotele*, e non con testi e nuda autorità, perché i discorsi nostri hanno a essere intorno al mondo sensibile e non sopra un mondo di carta”. “Ma da un altro punto di vista – commenta Vailati – questo *mondo di carta* di cui Galileo parla con tanto disprezzo, il mondo delle idee e delle immaginazioni umane, non è né meno reale, né meno sensibile, né meno meritevole di studio e di diligente osservazione, di quell'altro mondo all'investigazione del quale egli ha rivolto con tanto successo l'attività della sua mente”. «La storia delle teorie scientifiche su un dato soggetto non va concepita come la storia di una serie di tentativi successivi falliti tutti eccetto l'ultimo; essa non è da paragonare, come fu fatto con assai più spirito che profondità, alla serie di operazioni che fa chi voglia aprire una porta avendo a disposizione un mazzo di chiavi tra le quali egli non sa discernere quella che è atta allo scopo» (Vailati, 1972, pp. 5-6).

– È notevole il fatto che sia in Klein come in Vailati il tema della storia della scienza sia connesso con l'idea di un rinnovamento della didattica della matematica, e lo sia non per mere motivazioni di arricchimento di un'informazione fine a se stessa, ma per l'intrinseco interesse teoretico contenuto in questa informazione

che è portatrice, per il discente, di un'accresciuta comprensione e di un'attenzione più viva verso l'argomento considerato. In proposito vi è un passo di Vailati che merita di essere citato per intero: «Per ciò che riguarda anzi in modo speciale gli studi matematici, io non sarei del tutto alieno dal dar ragione a quelli che credono che il metodo migliore, dal lato didattico, per l'esposizione delle varie parti d'un determinato soggetto, sia quello che risulta dal presentare la materia, di cui esso si compone, sotto una forma che si discosti il meno possibile da quella che corrisponde al suo sviluppo storico. Quello che si chiama ora il metodo euristico, quel metodo cioè d'esposizione e d'insegnamento nel quale l'allievo o il lettore arriva ad impossessarsi delle cognizioni che costituiscono un dato ramo di scienza passando attraverso alle considerazioni che hanno guidato quelli che sono giunti ad esse per la prima volta, presenta da questo lato indiscutibili vantaggi sull'ordinario metodo d'esposizione, il quale, astraendo affatto da qualunque considerazione d'indole psicologica sulla differenza di tirocinio mentale e di abitudini coordinatrici tra chi impara e chi insegna, mira ad esporre fin dal principio il soggetto sotto la forma che all'insegnante può sembrare la più logicamente connessa, la più *up to date*, come direbbero gli inglesi, sotto la forma più soddisfacente insomma, per chi, come lui, abbia già conoscenza del ramo di ricerca di cui si tratta, e per chi come lui non senta altro bisogno che quello di sistematizzare e coordinare un complesso di cognizioni che possiede già. Come scienziato, come pensatore, come scrittore, l'insegnante può bene aspirare ad appartenere alla nobile schiera *dei maestri di color che sanno*, ma, come insegnante, egli ha soprattutto il compito di essere il maestro di *color che non sanno*. A nessuno che abbia avuto occasione di trattare in scuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione, discostandosi per una circostanza qualsiasi dall'or-

dinario andamento dottrinale e deduttivo, lascia luogo a delle considerazioni d'indole storica, a considerazioni, per esempio, che si riferiscano alla natura dei problemi e delle difficoltà che hanno dato origine allo svolgimento d'una teoria o all'introduzione d'un metodo, alle ragioni per le quali determinati concetti o determinate convenzioni sono state adottate, o ai diversi punti di vista dai quali un dato soggetto fu considerato da quelli che maggiormente contribuirono ad avanzarne la trattazione scientifica. Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovani per quella parte degli alimenti intellettuali loro presentati che istintivamente riconoscono come facilmente assimilabile e più confacente al normale sviluppo delle loro facoltà, è certamente desiderabile trarre il maggior partito possibile. Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente» (ivi, pp. 8– 9).

– Il passato di un problema può intervenire come elemento creativo nella sua riproposizione e nel suo rinnovamento, perché rappresenta un campo di possibilità dissodate di cui occorre essere consapevoli nei loro successi e insuccessi: come materiali dunque per una nuova riflessione che non sorge dal nulla. La storia del problema può essere ben documentata. E tuttavia talora la documentazione risulta insufficiente ed allora debbono essere *immaginati dei percorsi* che hanno condotto a questo o a quel risultato ritenuto insoddisfacente. Per questo Gian-Carlo Rota parla di “storia reale”, ma anche di una “storia ideale” che un matematico di talento potrebbe ricostruire.

Egli dice precisamente: «Ogni matematico sarà d'accordo che un passo importante per risolvere un problema matematico, forse il passo più importante, consiste nell'analizzare altri tentativi, sia tentativi che sono stati precedentemente effettuati oppure tentativi che uno *immagina* potrebbero essere stati effettuati con l'obiettivo di scoprire come questi tentativi “precedenti” fossero

fuorvianti. In breve, nessun matematico si sognerebbe di aggredire un problema matematico sostanziale senza prima prendere conoscenza con la storia del problema, si tratti della storia reale o di una storia ideale che un matematico di talento potrebbe ricostruire» (Rota, 1991, p. 174).

– La questione non riguarda dunque soltanto una questione di fatti, o addirittura di fatterelli. Di mezzo vi è invece la comprensione del concetto, della sua multilateralità, ciò che lo rende ricco di interesse e dunque didatticamente efficace ed attraente, ma vi è anche il fatto che il suo passato entra direttamente nella sua ricreazione nel presente. «In termini filosofici, un matematico che risolve un problema non può evitare la storicità del problema. La matematica non è altro se non un soggetto storico per eccellenza» (ivi).

– Anche Carlo Cellucci sottolinea che «per comprendere la natura della matematica è importante considerarne lo sviluppo storico. Secondo i sostenitori dell'ortodossia prevalente, non occorre considerare lo sviluppo della matematica perché 'l'eziologia delle idee matematiche, per quanto interessante, non è qualcosa il cui studio promette di rivelare molto sulla struttura del pensiero: per la maggior parte, l'origine e lo sviluppo delle idee matematiche sono semplicemente troppo determinate da influenze estranee' (George-Velleman, *Philosophies of Mathematics*, Blackwell, Oxford 2002, p. 2)» (Cellucci, 2007, p. 108). E aggiunge: «Non considerare lo sviluppo storico della matematica porta a vedere la matematica come un sistema statico, basato su relazioni lineari di dipendenza logica tra assiomi e teoremi determinati a priori. Un esame dello sviluppo storico mostra invece che la matematica è un sistema dinamico, che spesso si evolve per vie tortuose non determinate a priori, e procede attraverso false partenze e arresti, periodi di routine e svolte improvvise» (ivi, 109).

Intuizione e costruzione

Intuizione

– È sbagliata l'idea che conferisce la chiarezza solo dalla parte del concetto e la vaghezza solo dalla parte dell'“intuizione”. L'intuizione può essere chiara o confusa esattamente come il concetto. Un concetto confuso è un concetto ambiguo, non chiaramente differenziato da un'altro, ecc.

– In taluni casi si potrebbe dire: *non* questo concetto è lontano dalla nostra intuizione o è controintuitivo, ma: a questo concetto spetta *una oscurità intuitiva essenziale* (cioè non ha un corrispondente intuitivo in linea di principio).

– All'infinito attuale spetta una oscurità intuitiva essenziale? Forse. Ma l'intuizione assolve ancora uno scopo sia nella costituzione della nozione (rimando all'infinito potenziale), sia nel fornire comunque un qualche *appoggio immaginativo* ad esso: le infinite stelle del cielo. Potremmo anche dire: che difficoltà c'è nell'infinito attuale? Anche un bambino potrebbe *figurarselo!*

– Mentre per l'area semantica della parola *costruzione* possiamo esplorare gli impieghi correnti traendone alcune indicazioni, per la parola *intuizione* le cose stanno molto diversamente. Vi è forse un unico impiego chiaramente comprensibile nel discorso corrente di questa parola. Si tratta di espressioni come “felice intuizione”, “intuizione improvvisa” e di altre analoghe che vengono spesso utilizzate per indicare un'idea che ci viene in mente chissà in che modo e chissà da dove e che ci consente di uscire da una situazione di difficoltà o di imbarazzo, di realizzare la soluzione di un problema, oppure di fare una piccola ingegnosa scoperta. Da questa idea siamo in qualche modo “illuminati” – dell'intuizione si può dire che essa è “illuminante”. Quando usiamo questa espressione vogliamo spesso sottolineare, nel discorso

corrente, che l'idea che ci è venuta in mente non dipende da una qualche riflessione o argomentazione, e nemmeno in seguito ad un qualche processo conoscitivo chiaramente identificato, ma ha preso forma nella nostra testa forse in dipendenza di uno stimolo che tuttavia non è chiaramente identificabile. In ogni caso si tratta di un'idea buona, che può contenere appunto la soluzione di un problema da cui in precedenza non vedevano una via d'uscita. In questo contesto è opportuno rammentare anche la parola *intuito*, che viene spesso impiegata proprio per indicare la capacità di avere intuizioni nel senso ora indicato.

– Considerando gli impieghi correnti non credo che ci si possa spingere molto oltre. Ma essi ci dicono troppo poco invece sui sensi che questa parola può assumere negli impieghi filosofici, scientifici ed epistemologici.

– Intanto comincerei con il mettere avanti un'accezione di intuizione che non è compresa nelle considerazioni precedenti e che io ritengo sia l'accezione fondamentale.

– Si tratta dell'accezione che è contenuta nella versione latina del termine da cui quella italiana è derivata. *Intueor* in latino significa vedere o guardare. Il prefisso *in-* suggerisce che si tratti di un guardare o di un vedere penetrante, quindi di una vista acuta. Boezio, ad esempio, parla dell'intuito degli uccelli – *intuitus avium*, in cui è presumibilmente contenuta un'allusione non solo alla facoltà visiva degli uccelli, ma anche alla loro vista “acuta”. Negli impieghi filosofici questa origine letterale non è forse in primo piano, ma io credo che non sia mai totalmente dimenticata. In base ad essa “intuire” significa appunto niente altro che vedere; per estensione tuttavia questo termine potrà comprendere anche il percepire in genere e i diversi tipi di atti in cui esso si articola.

– In questo significato letterale del termine va ricercata anche la

contrapposizione gravida di conseguenze tra intuizione e pensiero. Su di essa si addensano nugoli di problemi, controversie di ogni genere: ma la sua giustificazione e la sua legittimità è in fin dei conti del tutto a portata di mano. Noi possiamo concepire qualcosa (averne un concetto, pensare) senza avere l'intuizione di essa. Ad un cieco, ad esempio, può essere insegnato l'impiego delle parole di colore, la loro "sintassi" – cosicché può usare correttamente parole come "sfumatura", "più chiaro", "più scuro" ecc. oppure può dire che l'arancione sta tra il rosso e il giallo. Egli possiede dunque il pensiero del colore, senza poter possedere l'intuizione corrispondente. Per lui vi è un sintassi, ma non una semantica di esse. Se riacquista la vista, allora ecco che il sistema di regole che gli consentiva l'impiego corretto delle parole di colore riceve una semantica, ovvero un'interpretazione in base alla quale quel sistema viene effettivamente agganciato ad un mondo di cose.

Intuizione ed evidenza

– Tenendo presente il significato letterale riusciamo facilmente ad afferrare anche il classico legame tra l'intuizione e la problematica dell'evidenza. Prendiamo parole come "consonanza" e "dissonanza": i concetti che stanno alla base del significato di queste parole possono probabilmente essere illustrati in parole con determinate spiegazioni. Posso spiegare che cosa accade se una corda tesa viene pizzicata e se suoni emessi da corde tese vengono fatti risuonare insieme. Posso anche spiegare verbalmente come la lunghezza o la tensione della cosa sia importante per il risultato, ed anche stabilire dei rapporti numerici tra le lunghezze delle corde ed elaborare variamente queste nozioni, eventualmente ricorrendo a nozioni di fisica del suono.

– Tutte queste spiegazioni contribuiscono certamente a fornire un concetto di consonanza o dissonanza. Ma esso riceve "evi-

denza” solo nel momento in cui faccio risuonare un accordo consonantico o una dura dissonanza. Allora il concetto stesso, per così dire, si illumina. Prima era chiaro solo sulla base di determinazioni astratte, ad esempio un rapporto numerico da cui non avrei certo potuto estrarre un “corpo”. Ora il rapporto numerico può essere addirittura dimenticato, ma resta il fenomeno vivo, corposo, evidente della consonanza.

– La parola “evidenza” tuttavia, nella tradizione filosofica non è certo stata utilizzata solo in simili contesti. Il suo significato muta e il significato di “intuizione” subisce il contraccolpo di questo mutamento. Il termine di “intuizione” si allontana sempre più dall’accezione originaria che talvolta è a malapena riconoscibile.

– Così si parla di evidenza riferendola a principi logici generali. Ad esempio: la parte non può essere maggiore del tutto di cui è parte. E trovi immediatamente il logico sapiente che scuote la testa e ti parla dell’equinumerosità della totalità dei numeri naturali con la quella dei numeri pari... Vedi quanto ti può ingannare l’intuizione! Non si parli più di evidenza... Avrà ragione il logico sapiente oppure – *avendo egli cambiato gioco linguistico* – ha semplicemente fatto il gioco delle tre carte? Ma avrà certamente torto chi sostiene che quel principio è frutto di un’intuizione intesa come una speciale sensazione, come una illuminazione interiore della sua verità. Come se egli dicesse: *senso* che quel principio è vero. – Ma io, ad esempio, non lo sento. Senza che sia costretto ad accettare il gioco delle tre carte.

– Stiamo entrando in un campo scivoloso, ambiguo, pieno di possibili equivoci. Se poi si fa un passo oltre in questa direzione ci si imbatte in un’altra accezione del termine intuizione che è piuttosto lontana dal significato originario, benché ne mantenga alcuni tratti. La contrapposizione con il pensiero, che per molti versi è perfettamente giustificata ed anzi necessaria, tende a far

scivolare la parola intuizione verso l'idea di una forma di conoscenza contrapposta ed autonoma rispetto la conoscenza razionale e scientifica in genere. Allora l'intuizione indicherebbe una specialissima forma di conoscenza che segue un cammino del tutto diverso da quello della conoscenza scientifica e che sarebbe tuttavia capace di fondare un sapere autonomo. Quale sapere? Su ciò io non saprei dare una risposta. Bisogna chiederla a chi si fa sostenitore di una simile concezione.

– Comunque vale in generale che in presenza di autori importanti che si avvalgono del termine di “intuizione” è necessario penetrare in modo non superficiale all'interno del loro modo di filosofare per comprendere il senso dell'impiego di questo termine che da questo modo è strettamente determinato.

– È infine opportuno segnalare un uso piuttosto particolare del termine intuizione, intuitivo e simili da parte di taluni logici e matematici. Questo termine viene polemicamente ripreso, contrapponendo le costruzioni logico–linguistiche considerate perfettamente in ordine a ciò che invece è un puro portato dell'“intuizione” – termine che, impiegato così, può essere sostituire parole come “buon senso”, “senso comune”, “vaga opinione”. Naturalmente ciascuno può fare dei termini l'uso che vuole. Credo però che si debba avvertire che una simile accezione non ha precedenti nella tradizione filosofica e si tratta, a mio avviso, di un uso polemico del termine assai rozzo, per il fatto che talora è inconsapevole dell'importanza e della complessità della partita che si gioca nelle vicende del pensiero filosofico sotto il termine di intuizione e della molteplicità dei sensi che esso riceve all'interno di queste vicende.

– In ogni caso qualunque logico o matematico fa “uso dell'intuizione” nella stessa misura opera necessariamente su segni, e i segni li deve vedere. Un logico o un matematico cieco è certa-

mente più improbabile che un musicista cieco; ed assomiglierebbe molto ad un pittore cieco.

– “È *evidente* che in ogni addizione posso commutare i termini senza mutamento del risultato: $2 \times 3 = 3 \times 2$ ”.

– “Ma come fai a saperlo?” Klein (1933, p. 12) suggerisce questo esempio:



Da questa figura *vediamo* che $2 \times 3 = 3 \times 2$. L'operazione aritmetica viene riportata alla *Gestalt* della figura – *come se si trattasse di due modi di vederla*: secondo un modo si possono vedere due 3, secondo un altro tre 2. Ciò rammenta ancora ciò che Wittgenstein osserva – problematicamente (ma questo vale anche per Klein) – sulla possibilità che una figura possa essere una dimostrazione. Ma un conto è la costruzione operativa di un segno, cioè il modo in cui esso viene prodotto in un calcolo, ed un altro è il modo in cui esso si presenta alla percezione, la sua configurazione percettiva. La sua *Gestalt*, per l'appunto. Quest'ultima può addirittura trarci in inganno sulla regola della costruzione. Inoltre questo esempio tratta di un caso singolo. Come posso sapere che questa legge vale anche per numeri molto grandi che, in una simile scrittura per punti, sarebbero inafferrabili? Ancora Klein risponde che a ciò provvede l'induzione completa: «Questo principio che io ritengo autenticamente intuitivo, aiuta di fatto proprio a superare i limiti presso i quali fallisce l'intuizione sensibile» (Klein, 1933 p. 12). Tuttavia a me sembra che non sia facile in questo caso passare da una relazione visivamente colta ad una generalizzazione fondata sull'induzione completa. Anche in rapporto a questo problema, manca nell'esempio l'idea della

regola di formazione della figura, o almeno essa non è in primo piano. Inoltre si ha la sensazione che anche i matematici che in un modo o nell'altro danno un peso all'intuizione, spesso usino questo termine in un modo fluttuante tra i vari suoi possibili sensi. Nel passo or ora citato Klein afferma impegnativamente che «non è eccessivo affermare che, secondo la concezione delle regole di calcolo che noi abbiamo or ora delineato, la sicurezza dell'intera struttura della matematica poggia sull'intuizione, dove questa parola deve essere intesa nel suo senso più generale» (ivi). Ma qual è il senso più generale della parola “intuizione”?

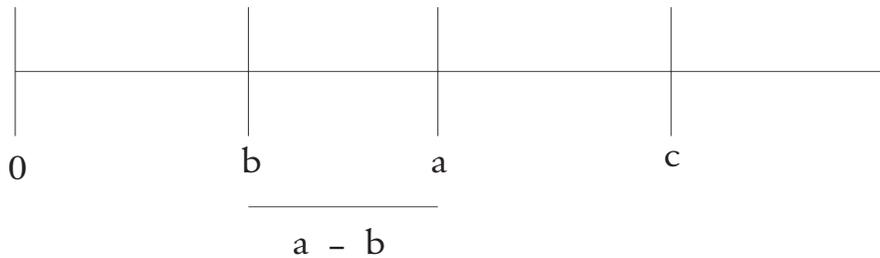
– Dal contesto in ogni caso si può comprendere il senso prevalente. Facendo riferimento a Hilbert, ancora Klein osserva che, persino nel formalismo non possiamo fare a meno di un «residuo di intuizione» nella misura in cui dobbiamo essere in grado di contraddistinguere un segno da un altro, e qui evidentemente il senso prevalente riguarda proprio il vedere: «La tendenza a reprimere interamente l'intuizione ed a sostenere ricerca puramente logiche non mi sembra completamente realizzabile. Io penso che si debba sempre mantenere un residuo, sia pure minimo, di intuizione. Si deve pur sempre usare una certa intuizione anche nella più astratta formulazione con i simboli che vengono usati nelle operazioni, al fine di riconoscere i simboli nuovamente, anche se si ha di mira soltanto l'aspetto esterno delle lettere» (1933, p. 15). Qui “intuizione” sembra proprio indicare l'intuizione sensibile, il vedere nel senso usuale.

– A questo proposito vi è un altro esempio particolarmente pregnante che Klein propone come esempio, si potrebbe dire, di dimostrazione attraverso la vista. Come si sa, vale tra i principi elementari dell'uso dei segni + e – e delle parentesi la regola, essendo a, b e c numeri interi positivi

$$c - (a - b) = c - a + b$$

Io non sono in grado di ricordare se questa regola ci sia stata in

qualche modo dimostrata o comunque spiegata in modo persuasivo o semplicemente dichiarata come una regola da prendere così come è. Ora, va da sé che un atteggiamento “intuitivo” non rinuncerà facilmente a intravedere nel numero l’elemento “geometrico”, ed anzitutto naturalmente nella serie dei numeri l’immagine della retta. Ora, lo $(a - b)$ di cui sopra, essendo $c > a > b$, potrà essere rappresentato, osserva Klein, dalla figura seguente:



In effetti a , b , c vanno ora intesi come segmenti $0a$, $0b$ e $0c$ e se pensiamo di “sottrarre” b da a , il segmento indicato in figura è appunto $(a - b)$. Ora se da c “sottraggo” $(a - b)$ la situazione rimane esattamente la stessa se, sottraendo da c anzitutto l’intero segmento a vi aggiungo poi il segmento b . Infatti facendo da c la sottrazione di a ciò che debbo fare *per soddisfare la nostra eguaglianza* è appunto aggiungere b .

Ma su tutto ciò abbiamo ragionato anche troppo. Per Klein si tratta di una semplice dimostrazione (*Beweis*) intuitiva, come esempio di “quelle dimostrazioni che hanno bisogno per sussistere solo della figura (*Abbildung*) e della paroletta “Guarda!” (*Siehe!*), come era costume tra gli antichi indiani” (Klein, 1933, p. 28).

Ed io confesso che, anche soltanto per pure ragioni culturali, alla mia tarda età, vorrei ricordarmi insieme alla regoletta del cambiamento di segno, anche di una qualche sua giustificazione, foss’anche quella proposta da Klein, che alcuni potrebbero considerare particolarmente rozza.

– Non ci si può a questo punto non rammentare, ancora di Wittgenstein, la frase «Non pensare, ma guarda» (*Denk nicht, sondern schau!*) – questo “guarda” è poi pudicamente tradotto nella versione italiana delle *Ricerche Filosofiche* (1967, oss. 66) con “osserva”, che è tutt’altra cosa, oltre che poter essere malevolmente considerato un vero e proprio errore di traduzione. Ma non lo è: è una decisione consapevole. Il traduttore si vergogna un poco di questo “guarda” che appare addirittura in contrapposizione con il pensiero. (Una frase simile insieme ad altre inclinazioni di discorso mi fa pensare che Klein fosse tra le letture di Wittgenstein).

– Un altro aspetto importante per comprendere la posizione di Klein è quello dell’“applicazione” (*Anwendung*) a cui abbiamo già accennato. «Certo i nessi puramente logici debbono rimanere il fermo scheletro nell’organismo della matematica, che ad essa conferisce una peculiare solidità e sicurezza. Ma ciò che è vivo nella matematica, gli stimoli più importanti, la loro efficacia verso l’esterno poggiano assolutamente sulle applicazioni, cioè sulle interazioni di quelle cose puramente logiche in rapporto ad altri campi. Bandire le applicazioni dalla matematica sarebbe quindi come se si volesse trovare la natura dell’animale vivente nell’impianto dello scheletro, senza prendere in considerazione muscoli, nervi e tessuti, istinti, in generale la vita dell’animale» (1932, pp. 14-15).

– Questa formulazione, molto interessante, non deve essere fraintesa in senso “organicistico-vitalistico” come se implicasse tacitamente un rifiuto di ogni forma di “meccanizzazione”. Altra cosa è chiedere che la matematica sia una cosa viva, e tanto più questa esigenza è importante quando ha di mira, come in Klein, certi modi di insegnare la matematica nelle scuole che unisce l’astrattezza all’autoritarismo – «Così stanno le cose, e se non sai che stanno così, saranno guai per te» (1933, p. 7) (ed anche

questa frase fa venire in mente l'insegnamento di Wittgenstein). In quella frase in realtà confluiscono alcuni temi differenti, anche se legati tra loro. Quando in Klein si parla di intuizione si chiede intanto di non perdere il rapporto con la comprensione del concetto. Di questo rapporto fa parte naturalmente anche la sua "storia", vuoi reale, vuoi ideale. Ma nemmeno va perduto il rapporto con la realtà e dunque, in questo senso, con l'applicazione. Nel primo punto ricade l'idea di *illustrazioni visive dell'astratto concettuale*, ed eventualmente di riconduzione dell'aritmetico alla figuralità. Il problema dell'applicazione coinvolge non solo la critica ad una posizione formalistica, ma anche il problema della comprensione. Il concetto astratto potrebbe talvolta essere meglio "compreso" nella sua applicazione concreta. Proprio facendo riferimento a Klein, Poincaré rammenta che questi, per una delle questioni più astratte della teoria delle funzioni, organizza a scopi quasi dimostrativi un vero e proprio esperimento fisico utilizzando una superficie metallica e collegando due suoi punti in comunicazione con i due poli di una pila. Commenta Poincaré: "un logico avrebbe rigettato con orrore una simile concezione, o meglio non l'avrebbe rigettata, poiché nella sua mente non sarebbe mai potuta nascere" (Poincaré, 1994, p. 12) Nello stesso saggio *L'intuizione e la logica nelle matematiche* Poincaré sottolinea la plurivocità di sensi che la parola *intuizione* può avere (p. 17), e che, secondo i contesti, prevale l'uno o l'altro. L'idea guida è la complementarità di logica e intuizione – poiché l'intuizione non può darci né il rigore né la certezza. "La logica e l'intuizione hanno ciascuna la loro parte necessaria. Tutt'e due sono indispensabili. La logica, che soltanto può dare la certezza, è lo strumento della dimostrazione; l'intuizione, lo strumento dell'invenzione" (p. 23).

Costruzione

– L'oggetto costruito si contrappone all'oggetto trovato, ad

esempio, una pietra che io raccolgo lungo la riva del mare e che mi attira per qualche sua particolare caratteristica, il suo colore, la sua forma o le venature che compaiono alla sua superficie. Naturalmente questa pietra è risultato di un processo, quindi anche di un lavoro: il lavoro del mare, durato forse un millennio. Tuttavia questo non basta per fare di questa pietra un oggetto “costruito”. Anche gli alberi o i fiori sono risultati di processi che mettono capo a formazioni fortemente organizzate. Tuttavia anch’essi non li caratterizzeremmo come oggetti costruiti.

– Se dovessimo invece indicare un oggetto costruito probabilmente andremmo diritti verso un edificio, una casa – il costruire è appunto un ottimo sinonimo di edificare. Ma che cosa contraddistingue un edificio, da una pietra o da un albero? Forse potremmo rispondere: in rapporto alla pietra e all’albero manca quell’elemento di artificialità che vi è invece nel “fare” che mette capo ad una casa, ad un edificio in genere. Questo elemento rinvia a sua volta ad una soggettività che realizza la costruzione – il muratore o, alle spalle del muratore, l’architetto. Forse questa è la strada giusta.

– E tuttavia... tuttavia il modo stesso in cui ci siamo espressi ci rende forse avvertiti di un altro aspetto della questione forse altrettanto importante. La soggettività realizza la costruzione. Ma soggettività e costruzione non stanno obbligatoriamente l’una nell’altra.

– Pensiamo ancora al muratore, e non attribuiamoli un compito così impegnativo come è quello di realizzare una casa intera. Basterà pensare ad un muro – e proprio ad un muro, e non a una qualche altra cosa che occasionalmente il muratore fa. Con una pala il muratore potrebbe fare un mucchio di ghiaia, ma un mucchio di ghiaia non lo diresti una costruzione. Un semplice muro invece sì, ed evidentemente non solo per il fatto che c’è

qualcuno che lo fa.

– Si tratta invece di questo: un muro viene fatto secondo una precisa procedura, secondo una regola perfettamente determinata. La regola molto semplificata potrebbe essere formulata così: metti un mattone su un altro mattone. Questa formulazione un po' singolare può riguardare una sola azione. Di conseguenza assume particolare importanza la sua *ripetizione*. La singola azione che è conforme alla regola verrà ripetuta sino all'adempimento del compito. Occorre notare anche che un mattone deve essere stato prima posto affinché sia possibile porre su di esso un altro mattone.

*Intuitività dell'oggetto e comprensibilità
della regola per la sua costruzione*

– A tutta prima, potrà sembrare che i termini di costruzione e intuizione puntino in direzioni molto diverse. In quella che abbiamo chiamato l'accezione fondamentale del termine intuizione, potremmo dire che l'oggetto intuitivo è essenzialmente un oggetto trovato piuttosto che un oggetto costruito. Talvolta si parla degli oggetti dell'intuizione come dei dati: ciò che importa è allora il loro esserci, il fatto che ci sono e sono afferrati intuitivamente in questo loro esserci. Sembra così che ci troviamo al polo opposto del problema della costruzione. Ma le cose non stanno esattamente così.

– Ripensiamo al problema dell'intuizione corrispondente ad un concetto oppure anche ad un dato concreto di cui abbiamo dato solo una caratterizzazione astratta. Potremmo dire, per riprendere l'esempio precedente, che la parola "consonanza" ha un "senso oscuro" senza intuizione corrispondente. O addirittura che essa è "priva di senso". Ma non ci vuol molto a comprendere che in queste espressioni è implicito un criterio del senso

troppo forte. Se lo dovessimo applicare letteralmente esso non riuscirebbe a rendere conto nemmeno dell'impiego delle parole del discorso corrente, per non dire delle parole nel discorso scientifico.

– Ad esempio la chiarezza e distinzione intuitiva che spetta ai poligoni di quattro o cinque lati viene meno nel caso dei poligoni con 1000 lati. Evidentemente non possiamo ammettere che il senso della parola poligono sia più o meno chiaro secondo il numero dei suoi lati. Si tratta allora di vedere in che modo si possa mantenere l'istanza contenuta nella richiesta di un'intuizione corrispondente senza incorrere in una situazione tanto imbarazzante. E proprio la strada che ricerca una soluzione conduce ad una sorta di vero e proprio *ribaltamento del problema dell'intuizione in quello della costruzione*.

– Anziché come dato l'oggetto viene considerato come costruito e se è possibile formulare una regola “trasparente” per la sua costruzione, questa trasparenza può assolvere una funzione assai simile, se non la stessa funzione, dell'intuitività della figura.

– Un poligono può essere considerato come una figura esistente in se stessa che ha determinate proprietà – quindi come un'oggettività data di cui potremmo dare una definizione. Ma vi è anche un altro modo di considerarlo, e precisamente come il risultato di un'azione che mette capo ad esso come proprio risultato. Si prenda un cerchio, si contrassegnino punti sulla sua circonferenza e li si congiungano procedendo da sinistra a destra rispettando rigorosamente l'ordine.

La procedura ha un carattere del tutto generale ed è dunque possibile costruire attraverso di essa poligoni per un numero qualsiasi di lati. Se il numero dei punti è molto elevato presumibilmente vi saranno difficoltà di ogni genere per realizzarlo in disegno, ma la costruzione effettiva, empirica, è del tutto priva di

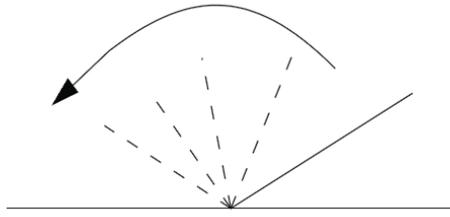
interesse, mentre è importante *la possibilità della costruzione*, possibilità che non ha bisogno di essere dimostrata, ma semplicemente mostrata nei casi più semplici. Fai così e così, e poi ancora così e così, eccetera.

– Una delle operazioni fondamentali del pensiero astratto sta nello stabilire connessioni, e precisamente connessioni che hanno una logica *costruttivo-generativa*. O che mostrano un nesso attraverso una procedura di trasformazione.

– Ciò che si richiede è che venga afferrato chiaramente come funziona la regola: ciò che importa non è il darsi intuitivo dell'oggetto, quanto piuttosto la *comprensibilità della regola*. Potremmo dire che *l'intuitività dell'oggetto trapassa nella comprensibilità della regola per la sua costruzione*.

– Si dovrebbe provare meraviglia di fronte alle discussioni che tentano di mettere in questione la tenuta logica del principio di “induzione completa”; e questo non per il fatto che questo principio sembra a occhio e croce “evidente”, ma per il fatto che esso aderisce perfettamente alla *formula costruttiva della serie*. E sarebbe del tutto fuori luogo, come hanno fatto in realtà gli stessi sostenitori di quel principio, attribuire ad esso un fondamento intuitivo. A meno che con intuizione non si intenda del tutto impropriamente l'afferramento del senso di quella formula.

– Un concetto generale che viene formato per tratti (proprietà) comuni, così caro alla logica tradizionale, è solo una delle possibili modi di concepire la nozione concetto. Altrove mi sono chiesto come mai Euclide non parli dell'angolo piatto (Piana, 1999, p. 125). Ed ho cercato di mostrare che esso era un buon esempio per un concetto non concepito come formato per tratti comuni ma attraverso l'indicazione di una procedura generativo-costruttiva.



Un altro buon esempio potrebbe forse essere quello che consente di porre sotto un unico concetto secante e tangente, facendo della tangente un caso limite della secante.

VI

L'aritmetica prima dell'aritmetica

La fortuna e la sfortuna della Filosofia dell'aritmetica

– Se tu avessi cominciato le tue letture husserliane dalla *Crisi delle scienze europee*, faresti bene a fare poi un grande balzo indietro, dagli anni trenta al 1891, data di pubblicazione della *Filosofia dell'aritmetica*. Nella *Crisi*, infatti, vi è un Husserl che fronteggia il proprio tempo in modo diretto, e appaiono dunque in primo piano le motivazioni che fanno della *Conferenza di Vienna* e del lavoro che vi sta intorno una sorta di grande manifesto filosofico-politico-culturale, animato dall'interno da una straordinaria passione etica. Quelle stesse motivazioni fanno sì che in essa non si possa chiaramente avvertire il senso e la portata della ricerca fenomenologica come ricerca, diciamo pure, di dettaglio, su temi particolari.

– “E si avvertono invece, tu pensi, in un'opera che è addirittura precedente all'elaborazione del concetto di fenomenologia?”

– Io credo di sì. E questo per il semplice fatto che la tematica

del *mondo della vita* (*Lebenswelt*) può essere considerata come un'estensione di quella che in precedenza si presentava spesso sotto il titolo di *Welterfahrung*: esperienza del mondo. L'espressione *esperienza del mondo* differisce nel suo senso da *mondo di esperienza* solo per il fatto che nel primo caso l'accento principale cade sull'elemento soggettivo dell'esperire, nel secondo su ciò che in questo esperire è esperito. Ora è sufficiente assumere il termine *Welterfahrung*, nell'una o nell'altra accezione e quello di "esperienza" nella sua accezione più lata – non solo dunque relativamente alla percezione, al ricordo, all'immaginazione... ma anche in generale ai vissuti emotivi ed agli atti propriamente pratici che sono a loro volta correlati a interessi, desideri e bisogni, per trovarci di fronte alla vita stessa come vita vissuta. Alla *Lebenswelt* – al *mondo della vita*. Ma prima della *Crisi*, e prima ancora che venisse elaborato il concetto di fenomenologia e che lo stesso termine di *Welterfahrung* si affacciasse nelle pagine di Husserl, il richiamo all'esperienza rappresenta un titolo per una problematica assai più ristretta e particolare: *la problematica dell'origine esperienziale dei concetti astratti*.

– Fra i concetti astratti vi è certamente il numero, dal momento che con concetto astratto in un'accezione generica e non troppo impegnativa potremmo intendere un concetto che non può essere ricondotto direttamente ad un'esperienza concreta, ovvero di esso non possiamo dare un esempio intuitivo, che possa essere messo sotto i nostri occhi, come lo possono invece "cavallo", "tavolo", "rosso, ecc. Certo, noi possiamo percepire due cose, ma esse non sono *il numero due*. Se d'altronde dicessimo che si tratta di una proprietà che posseggono due cose, la singolarità di questa proprietà salta subito all'occhio, perché non sapremmo affatto dire dove essa si trovi. E dunque sorge il dubbio che il termine di "proprietà" in questo caso non sia impiegato correttamente.

– Forse il numero due lo vedo con gli occhi della mente? Questa metafora non può insegnarci molto. Per l’approccio di Husserl a questo problema nelle sue linee generali, la *Crisi delle scienze europee* ha certo molto da insegnarci, basti rammentare i cenni contenuti in essa sulla problematica dell’origine della geometria. Perciò è giustificato il balzo all’indietro verso la *Filosofia dell’aritmetica*. Quest’opera può essere indicata come appartenente al periodo pre-fenomenologico perché essa precede l’elaborazione del metodo. Tuttavia sarebbe un errore considerarla del tutto superata rispetto alla tematica sviluppata successivamente. Così come sarebbe del tutto limitativo ritenere che essa possa essere considerata importante solo come un episodio interno dell’itinerario filosofico husserliano.

– “Ma la *Filosofia dell’aritmetica* non fu forse recensita negativamente – e qui e là addirittura beffardamente – da Frege che la criticò per il suo psicologismo?”

– Quella recensione determinò in effetti la fortuna, o meglio la “sfortuna” dell’opera: e poiché Husserl, ne accettò la critica sotto questo profilo, ed anzi, nelle *Ricerche logiche* egli condusse una critica assai più dettagliata di quella di Frege contro lo psicologismo nell’ambito della logica, non certo seguendone le indicazioni, ma percorrendo piuttosto un autonomo itinerario teorico che lo condusse all’elaborazione del punto di vista fenomenologico, la *Filosofia dell’aritmetica* venne completamente trascurata dalla letteratura specializzata. Ci fu un singolare conformismo, che avrebbe bisogno di qualche spiegazione storiografica, da parte di logici e filosofi della scienza, nell’accettare la posizione di Frege ai tempi del rinnovato interesse nei confronti di Husserl negli anni cinquanta in Italia. Non è un caso che, nonostante l’ampia diffusione della fenomenologia, la prima traduzione italiana di quest’opera risalga al 2001 a cura di Giovanni Leghissa. Un poco drasticamente, a mia volta nei miei *Elementi per una dottrina dell’esperienza* dichiaravo, nel contesto di una sintetica esposizione del contenuto della *Filosofia dell’aritmetica*, che «la confutazione

esemplare di Frege di quell'opera è esemplare anche per il modo in cui *non* coglie nel segno» (Piana, 1967, p. 283). Ma a quel tempo la mia fu una posizione del tutto isolata. Ed era motivata dal fatto che la critica di Frege, proprio per il fatto che è centrata sul problema dello psicologismo, si muove alla superficie della problematica proposta da Husserl e si riduce al rilievo di indeterminatezze di metodo che possiamo concedere fin dall'inizio, senza troppo danno al discorso teorico. Non è irrilevante poi notare che fu anzitutto Husserl ad attaccare le posizioni di Frege. Come osserva Matteo Ravasio, che ha dedicato al problema Husserl-Frege un'ampia discussione, «spesso si dimentica questa metà del dibattito, inscenando un duello surreale in cui solo un contendente attacca e colpisce» (Ravasio, 2013, p. 4).

– Il vero punto del contrasto non riguarda lo psicologismo, ma la metodologia della chiarificazione. E non è certo irrilevante che secondo questa metodologia si proceda in direzione ben diversa da quella del *logicismo*, dal momento che l'orientamento che si viene profilando nel corso dell'opera è un orientamento che guarda piuttosto al versante *formalista*. Alla fine dell'opera non solo viene teorizzata una filosofia dell'aritmetica che pone al centro l'elemento calcolistico, ma viene prospettata una teoria generale dei calcoli, intesi anzitutto come operazioni su sistemi di segni. Giustamente è stato notato da Richard Tieszen che né Frege né Husserl «erano soddisfatti del formalismo nello stile di Hilbert, benché nella seconda parte della sua *Filosofia dell'aritmetica* Husserl era in qualche modo più vicina a quella di Hilbert» (2005, p. 315). Dopo aver notato che «lo psicologismo era una forma molto diffusa di naturalismo relativamente alla logica ed alla matematica nel tardo secolo XIX», R. Tieszen osserva: «un altro punto notevole della *Filosofia dell'aritmetica* è che nel libro il punto di vista della 'conoscenza intuitiva' o 'diretta' in aritmetica è molto limitato. Quasi tutto della nostra conoscenza aritmetica è ritenuto 'simbolico' e nella seconda parte dell'opera Husserl

sviluppa un genere di formalismo sia nel caso dell'aritmetica sia per altre parti della matematica» (ivi, pp. 2-3)

– Il contrasto tra Husserl e Frege era di sostanza, e non di superficie. Il platonismo e l'oggettivismo di Frege non poteva accordarsi con il punto di vista della *Begriffsbildung* caratteristico di Husserl e che accompagna l'intero itinerario speculativo del filosofo. Ma nemmeno con quell'oggettivismo e con quel platonismo legato all'idea dell'intenzionalità, che rappresenta una importantissima novità nell'elaborazione della tematica "eidetica" di Husserl.

– Oggi l'importanza e la portata della *Filosofia dell'aritmetica* è ampiamente riconosciuta, così come del lavoro svolto da Husserl nel campo della filosofia della logica, e non solo in rapporto alle *Ricerche logiche*, ma anche a *Logica formale e trascendentale*. Da molti studiosi autorevoli la recensione di Frege viene oggi ritenuta esemplare «anche per il modo in cui non coglie nel segno» e dovrebbe essere ricordata ormai per il solo fatto che essa riuscì a ritardare di più di cento anni il riconoscimento dell'interesse di quell'opera.

– Scrive giustamente Stefania Centrone, in un notevole volume sulla logica e la filosofia della matematica del primo Husserl: «Secondo Rudolf Bernet 'il valore della *Filosofia dell'aritmetica* consiste nel fatto che essa anticipa certi decisivi risultati non solo delle *Ricerche logiche*, ma anche dell'opera tarda di Husserl'. Dal nostro punto di vista, in ogni caso il valore di questo testo va oltre il fatto di anticipare certe tesi che vennero consolidate nella fenomenologia di Husserl. Le soluzioni specifiche che Husserl avanza nel suo primo libro possiede un interesse intrinseco per la logica e la matematica, ed esse sono indipendenti dal contesto psicologista in cui esse hanno avuto origine» (Centrone, 2010, p. XII). Nell'introduzione a questo volume Peter Simons, in modo particolarmente

incisivo, scrive: «La storia della filosofia della matematica degli anni d'oro 1879–1939 difficilmente menziona Husserl. Si legge di Dedekind, Cantor, Frege, Peano, Russell, Poincaré, Hilbert, Brouwer, Weyl, Gödel, Church e Turing. Husserl è effettivamente fuori dal quadro perché la sua *Filosofia dell'aritmetica* venne criticata come psicologista da Frege, e l'opinione della maggioranza si trova dalla parte di Frege... È mia convinzione, basata in parte sulle prove stringenti presentate dal libro di Stefania Centrone, che Husserl dovrebbe meritare un'onorevole menzione nella storia della filosofia della matematica e della logica accanto a tutti gli altri, e che questo sarebbe stato più evidente se non fosse stato destinato a diventare il colosso filosofico con cui abbiamo familiarità» (Centrone, 2010, p. VIII).

– Il volume di Stefania Centrone è effettivamente un contributo assai importante per ciò che riguarda non solo la *Filosofia dell'aritmetica*, ma anche l'intero apporto di Husserl alla filosofia della matematica e della logica. Genera solo perplessità il fatto che in questo volume, non si attiri l'attenzione, e tanto meno si approfondisca, l'aspetto metodologico, ovvero il concetto di chiarificazione concettuale che sta alla base della *Filosofia dell'aritmetica*. In effetti quest'ultima opera, nonostante il titolo a tutto campo, si occupa anzitutto della *chiarificazione del concetto di numero e dell'idea di aritmetica*, secondo un concetto di chiarificazione che lo stesso Husserl formula in questo modo: un'indagine che voglia rispondere alla domanda “Che cosa è il numero” deve essenzialmente indicare i “fenomeni concreti” sulla cui base si effettuano le procedure che danno luogo al numero come proprio prodotto. *La chiarificazione del concetto assume la forma di un'indagine sulla sua origine.*

– I concetti astratti hanno fra l'altro anche la seguente peculiarità: se essi vengono applicati direttamente e ingenuamente non pongono nessun problema. Ma non appena cerchiamo di riflet-

tere sui concetti stessi, qui le nostre idee sembrano diventare singolarmente appannate. Calcoliamo senza problemi con numeri. Ma se ci chiediamo che cosa sia il numero, allora le nostre idee si confondono. Di fronte a domande come queste dovremmo cominciare una sorta di riflessione critica sulla domanda stessa. In luogo di chiedere che cosa sia il numero devi porti il problema del modo in cui esso viene prodotto.

– Stefania Centrone fa certo un’esposizione fedele della *Filosofia dell’aritmetica*, e tuttavia sorprende il fatto che non si soffermi sulla differenza tra statuto logico di un concetto come quello di numero e il processo della sua formazione, cosicché non sembra sottolineare a sufficienza la distinzione tra livello pre-aritmetico e livello dell’aritmetica “vera e propria”, che è il cardine dell’intero problema. Di conseguenza il volume, sorprendentemente, toglie di mezzo un’opera così importante per la filosofia della logica e così connessa con la *Filosofia dell’aritmetica* come *Erfahrung und Urteil*. Questa circostanza fa sospettare che, dietro le quinte del libro, ci sia ancora una vecchia idea della logica e dei suoi rapporti con la filosofia.

– Nasce il dubbio che la frase che poco fa abbiamo citato secondo cui «Le soluzioni specifiche che Husserl avanza nel suo primo libro possiede un interesse intrinseco per la logica e la matematica, ed esse sono indipendenti dal contesto psicologista in cui esse hanno avuto origine» abbia un senso differente da quello secondo cui la abbiamo inteso. Essa potrebbe essere interpretata come se si dovesse ritagliare la logica e la matematica non solo dalla filosofia in cui essa è inserita, ma dalla filosofia in genere: ovvero, come se ci fosse una filosofia della logica e della matematica che non abbia nulla a che fare con le prese di posizione filosofiche più generali in cui essa è inserita. In ogni caso va ribadito che il libro di Stefania Centrone resta uno dei più importanti contributi di questi anni sugli aspetti specificamente logico-matematici della filosofia di Husserl.

I compiti di una filosofia dell'aritmetica secondo Husserl

– “Che cosa è dunque una filosofia dell'aritmetica?”

– Vorrei rispondere a questa domanda approfittando proprio del testo di Husserl, quasi a titolo di un possibile esempio.

– L'idea iniziale è intanto il fatto che, trattando l'aritmetica del numero, si debba cominciare a rendere conto di questo concetto. Che cosa è implicato in esso? Sembra allora che ci si chieda quale sia il suo statuto logico, e dunque che una ricerca filosofica dovrebbe anzitutto compiere un'analisi volta in questa direzione. La formazione del concetto sembra essere un altro problema ed aver di mira soltanto il modo in cui nella *nostra testa* si forma il concetto di numero: dunque la sua *storia psicologica*.

– “Ora non ti sembra che Husserl riduca il primo problema al secondo, come del resto dimostra il sottotitolo del libro che suona *Ricerche logiche e psicologiche*?”

– Quel titolo, io credo, è un segno evidente che il problema di una chiara distinzione non viene percepito come un problema effettivamente rilevante. Beninteso nel libro *si argomenta*, per convalidare la propria posizione o invalidare le posizioni altrui. Ma per quanto riguarda la “formazione del concetto” è altrettanto indubbio che essa viene trattata più o meno implicitamente come un problema di ordine psicologico. Ma su questo punto non si avvia alcuna discussione di metodo. Ed allora noi dobbiamo badare soprattutto al contenuto. È giusto dire che si vorrebbe descrivere ciò che accade nella nostra mente nella formazione del concetto, come ci siamo precedentemente espressi? No, non è giusto. Nella nostra mente, vuol dire, nella mia mente, ma anche nella tua – e nella nostra mente potrebbero accadere cose molto differenti. A quanto sembra Frege non riusciva a pensare

insieme il rosso, la luna e Napoleone senza stabilire qualche relazione “in più” che collegasse oggetti tanto eterogenei (Frege, 1884, p. 427-28). Naturalmente aveva le sue buone ragioni. La testa di ciascuno è fatta come è fatta.

– L’espressione “storia psicologica” deve essere intesa in un’accezione molto debole. Che cosa si intende mai con questa espressione? In Husserl, se badiamo appunto al contenuto di ciò che gli dice, non troviamo “analisi introspettive”, e nemmeno vi è traccia di qualche esperimento di carattere psicologico. Ciò che possiamo rintracciare è qualche inflessione psicologizzante nel linguaggio che egli usa.

Per questo l’obiezione di psicologismo ha una presa piuttosto debole, come oggi viene ampiamente riconosciuto, mentre forse poteva aver maggior forza ai tempi della fondazione fregeana del logicismo.

– L’effettiva carenza della *Filosofia dell’aritmetica* sta proprio nel dibattito metodologico, che si può dire sia praticamente assente, ed in fondo anche per questo motivo l’obiezione di psicologismo non riesce a innestarsi su un terreno abbastanza profondo. La questione metodologica viene elusa e si punta piuttosto su un semplice principio di metodo formulato così: «Nessun concetto può essere pensato senza fondazione in un’intuizione concreta» (p. 79).

– È veramente necessario per applicare questo principio passare attraverso la psicologia, che cosa ha da dire l’introspezione a questo proposito o quale esperimento posso apprestare per metterlo in pratica? Non vi potrebbe essere una *storia ideale che conduce dal percepito al concetto?*

– Nello stesso tempo in quest’opera non si fa quasi nessun impiego di *cognizioni* propriamente psicologiche, non si ricorre a

materiali sperimentali o comunque ad una qualche documentazione “esterna” (ad esempio, sui meccanismi di apprendimento). In qualche punto ci si richiama ad una non meglio qualificata “esperienza interna”, ma in forma assai debole e non particolarmente significativa.

Il numero come concetto aperto

– L’inclinazione psicologista della *Filosofia dell’aritmetica* non è in grado di sopprimere il tema realmente rilevante qui in questione che è in realtà quello di trasformare la domanda “Che cosa è il numero?” nella domanda “Come si forma il numero?”: la domanda sull’essere viene tradotta in una domanda sul divenire che in certo senso riguarda anche il possibile futuro del numero. Se noi ci atteniamo alla prima forma della domanda dobbiamo assumere che *il numero c’è già*, e che dunque vi è *un’essenza del numero* inizialmente oscura, ma che può essere portata allo scoperto; e infine che questa essenza circoscrive in generale ciò che è il numero *una volta per tutte e in se stesso*.

Il problema che la domanda pone è quello della ricerca di una *definizione*. La nuova definizione deve essere capace di applicarsi ai vecchi numeri come ai nuovi, riconducendo così gli uni e gli altri sotto l’essenza immutabile del numero. Non è essa che muta, ma le definizioni che si avvicendano per stringerla in pugno.

– Wittgenstein rammenta una frase di Frege: «Frege ha detto una volta: ‘una retta è già tracciata prima che sia stata tracciata’» (Waismann, 1967, p. 165). Assumendo questo punto di vista la storia della matematica è una storia di “scoperte”, piuttosto che produzioni della creatività ed inventività dello spirito. Ed anche su questo punto Wittgenstein insegna: «Il matematico è un inventore (*Erfinder*): non uno che scopre (*Entdecker*)» (Wittgenstein, 1971, I, oss. 167, p. 64).

– Diversamente stanno le cose se intraprendiamo la via percorsa dal numero nel processo della sua formazione. Dobbiamo allora disporci in un luogo in cui il numero non c'è ancora e non c'è ancora l'aritmetica, ma che entrambi stanno per esserci. La conseguenza è che il concetto di numero così acquisito non ha un'essenza fissabile definitivamente una volta per tutte, ma è un *concetto aperto*, che può subire modificazioni ed estensioni di vario genere.

Il luogo del problema

– Talvolta le questioni filosofiche sono difficili da comprendere nella loro stessa impostazione. Più precisamente è difficile da comprendere il *luogo del problema* – dove esso si trovi. Così parliamo di numeri, comprendiamo il loro nome nel senso che impieghiamo correttamente le parole che li designano, e quindi comprendiamo anche il concetto che esprimono. Qui vi sono due mele, e diciamo appunto che esse sono due. Dov'è il problema?

– Percepriamo *una* cosa e percepiamo che essa è *gialla*. Nell'elenco delle sue *proprietà* porremmo anche la proprietà di essere *una*? Anzitutto saremmo tentati di rispondere affermativamente. In fin dei conti accertiamo percettivamente che tre cose sono tre esattamente come accertiamo che esse sono gialle. Vediamo che sono tre nel senso letterale del termine: le cogliamo a colpo d'occhio, a prima vista, senza ricorrere a nessuna procedura di conteggio.

– Qui ci imbattiamo già nel nodo fondamentale della teoria del numero nella *Filosofia dell'aritmetica*. Vi sono gruppi di cose il cui numero lo vediamo – che sono “direttamente rappresentate” – e gruppi di cose la cui numerosità non può essere valutata a vista, e gruppi di cose il cui numero può essere *pensato* grande a piacere, senza che né la percezione né l'immaginazione possa

offrire una qualche rappresentazione.

– Ma rifletti: che cosa significa qui “numero”? Che cosa vuol dire dire vedere il numero o la semplice numerosità, e che cosa il pensare quest’ultima grande a piacere?

– “Numero” significa qui il “pochi” e il “molti”, come quando si dice: vi era un *certo* numero di persone (poche) oppure che il pubblico era *numeroso* (molti); ed inoltre dobbiamo mettere da parte tutto ciò che sul numero ci hanno insegnato fin dalle scuole elementari: una sorta di “messa in parentesi” *ante litteram*. In effetti vi è la possibilità di incorrere in un equivoco rilevante, che investe anche una difficoltà di traduzione non facile da risolvere. Abbiamo parlato del “cogliere il numero a colpo d’occhio”. Vediamo subito che quelle persone sono tre. Non le abbiamo contate. Quando Husserl usa espressioni come *zählen* o *Zählung*, che significano correntemente *contare* e *conteggio*, occorre prestare attenzione se eventualmente egli non si riferisca a quelle piccole molteplicità concrete il cui numero può essere afferrato con lo sguardo, ed in tal caso questi termini, *senza perdere in altri contesti il loro senso usuale*, assumono invece il senso del “cogliere il numero ovvero la determinazione quantitativa della molteplicità a colpo d’occhio”. Questa duplicità di senso dovrebbe essere compresa contestualmente da parte del lettore senza particolare difficoltà.

– *Tre* cose sono fisicamente distinte da *due* cose, e questa possibilità di distinzione fisica è strettamente connessa con il fatto che la distinzione numerica è una distinzione che concerne una differenza visibile ed afferrabile. Non avremmo dunque ragioni per ritenere che la proprietà di essere due sia una proprietà di tipo particolare. Questa è l’opinione di Stuart Mill – ed è inutile dire che caratterizza un modo di pensare empiristico. Essa viene rammentata da Husserl nel primo capitolo della *Filosofia dell’aritmetica* (Husserl, 1970, p. 17) e tolta di mezzo in modo giustamente sbr-

gativo. Di ciò non val quasi la pena di parlare – osserva Husserl – perché l’impiego del numero è caratterizzato proprio dal fatto che il numero non si applica solo a cose della percezione, ma a enti in generale. In realtà possiamo parlare, ad esempio, di due possibilità (che sono certamente diverse da tre), di due concetti, ecc., e ciò basta per far perdere di senso il riportare la differenza numerica ad una distinzione fisico-fenomenica. E non solo possiamo applicare il concetto di numero ad oggetti qualunque, ma questi non debbono essere necessariamente omogenei, cioè appartenenti alla stessa “regione dell’essere”. Leibniz diceva – e Husserl lo rammenta – che il numero è qualcosa di interamente universale – *universalissimum* – e con il numero possiamo riunire enti di qualunque specie “dio, un angelo, un uomo, un movimento” (ivi, pp. 16– 17).

– Di qui risulta subito un altro fattore differenziante. Se sappiamo che due cose sono gialle sappiamo ad esempio anche che avranno una forma, un’estensione, una grandezza, un peso, ecc. Sappiamo dunque che tipi di cose sono ed a quale regione ontologica appartengano, mentre nulla sappiamo di esse, se sappiamo soltanto che sono due.

Numero e molteplicità

– Fin dalle prime pagine della *Filosofia dell’aritmetica* si attira l’attenzione sull’universalità del numero inteso come indipendenza dai *contenuti*, quindi come universalità *formale*. Il numero è un *concetto formale* (*Formbegriff*). Questa espressione merita di essere rammentata fin d’ora e rappresenta uno degli assi portanti della tematica husserliana relativa al concetto di numero – anzi alla matematica in genere. Distratto dalla sua critica della teoria dell’astrazione, Frege dedica più di una pagina ad ironizzare sull’astrarre inteso come “prescindere da”, senza rendersi conto che ciò che ha di mira Husserl è l’idea della *vuotezza del contenuto*

e, dal punto di vista generale, quella di una matematica formale, sovraordinata all'aritmetica stessa. Vero è che la distinzione tra concetto formale e concetto materiale (provvisto di un contenuto) non è chiaramente esposta come tale nella *Filosofia dell'aritmetica*, e comparirà invece nettamente nella discussione sulla nozione di proposizione analitica nella terza *Ricerca logica*. Non essendo chiaro questo punto, ma avendo di mira la teoria tradizionale dell'astrazione fortemente sospettata (ed in effetti sospettabile) di psicologismo l'ironia fregeana intende colpire l'idea di molteplicità a partire dalla quale inizia il percorso husserliano verso il numero "aritmetico".

– Per indicare la molteplicità Husserl usa il termine di *Vielheit*, ma anche quello di *Menge* (insieme) oppure quello di *Inbegriff* (aggregato). Benché egli li usi con una certa libertà e senza particolari vincoli, vi è un punto in cui egli precisa che "laddove ci siamo trovati in prossimità di fenomeni concreti" si è preferito impiegare i termini di insieme o di aggregato, mentre il termine di molteplicità si richiama ad un impiego più generale (Husserl 1970, p. 347).

– All'inizio della nostra ricerca possiamo usare questi termini, come del resto gli altri che abbiamo ricordato, non solo senza fissare una precisa differenza tra essi, ma anche nel presupposto che "ognuno sappia che cosa si intenda con queste espressioni". Dunque non si propongono definizioni. Eventualmente possono essere utili degli *esempi* che andremo a cercare ovviamente anzitutto nell'ambito delle molteplicità concrete, della molteplicità percepite. Questo è indubbiamente uno dei punti chiave del dibattito teorico. Husserl critica Frege sia per la cosiddetta "definizione per astrazione", sia per l'idea che un concetto sia chiaro solo quando di esso si dispone di una definizione adeguata. Di conseguenza le parti che Frege, nella sua recensione, dedicate al tema del definire sono una sorta di autodifesa. Del resto anche

su questo si gioca la drastica divergenza tra i due autori, ed anch'essa non riguarda specificamente l'inflessione psicologista della tematica svolta da Husserl.

– Di conseguenza Frege è costretto anche a fare l'allocco sul problema del *collegamento collettivo*. A ciò ho già accennato, ma la frase merita di essere citata per intero: “Debbo confessare che non mi è riuscito di formarmi un aggregato secondo le istruzioni dell'autore. Col collegamento collettivo, i contenuti debbono venire pensati o rappresentati semplicemente insieme, senza che venga rappresentata una loro qualunque relazione o un loro qualsiasi nesso. A me questo non è possibile. Non riesco a rappresentarmi il rosso, la luna e Napoleone senza alcun collegamento tra loro; per esempio, il rosso di un villaggio che brucia, dal quale si stacchi la figura di Napoleone, illuminato a destra dalla luna” (Frege, 1884, pp. 427-428). Ciò mi fa pensare che, quando Frege vuol fare lo psicologista, lo sappia fare assai bene e che vi sia un più verace psicologismo nella sua recensione che nell'intera *Filosofia dell'aritmetica*. E dire che, da logico qual era, avrebbe potuto approfittare del suggerimento che gli veniva da Husserl quando indica come segno del collegamento collettivo la paroletta “e”, la quale non è obbligata a realizzare il quadretto surrealista qui sopra descritto né ha normalmente la funzione di realizzare simili quadretti.

– Vi sono diversi tipi di collegamenti fra gli oggetti una molteplicità che determinano a loro volta diversi tipi di interi e, al fine del concetto di numero, il tipo di collegamento in questione è in certo senso il più debole possibile, tanto da essere presentato come un collegamento “estrinseco” (*äusserlich*). E proprio per questo, trattandosi del collegamento più elementare e nello stesso tempo più “vuoto”, ogni intero, *qualunque sia la sua forma ulteriore di collegamento*, è *anzitutto* una collezione. Manifestamente questo è un discorso che riguarda gli oggetti, le molteplicità, i

collegamenti, i tipi di intero. Non riguarda la psiche di questo o di quello. E se la psiche di Frege non riesce a realizzare mentalmente una collezione sono solo affari suoi – come egli stesso mi concederebbe.

– Occorre dire tuttavia che la terminologia utilizzata da Husserl facilita interpretazioni psicologizzanti. Essendo la parola “collegamento” (*Verbindung*) assai prossima nel suo senso alla parola “relazione” (*Relation*) il problema del collegamento collettivo deve essere considerato nel quadro più ampio di una “teoria delle relazioni”. In proposito dobbiamo subito distinguere tra una relazione in genere, che è “ciò che forma la base per la formazione di attributi relazionali” (ovvero per la enunciazione di giudizi relazionali) e ciò che potremmo chiamare i “fondamenti della relazione” per indicare le cose (i contenuti) che sono posti in relazione.

– Seguendo alla lettera il testo di Husserl tra le varie classificazioni proponibili, ve ne è una per noi particolarmente interessante. Vi sono relazioni “primarie” e relazioni “psichiche”. Le relazioni vengono dette primarie quando esse poggiano sulle caratteristiche dei fondamenti della relazione. Così la relazione “A è a destra di B” sarà da considerare primaria dal momento che essa determina la localizzazione delle cose A e B in un certo contesto spaziale. Relazioni primarie saranno anche quelle concernenti la somiglianza o l’eguaglianza, prendendo questi termini nel loro impiego concreto. Analogamente per il *collegamento di continuità* che si ha quando l’intero è formato da parti che “scivolano” l’una dentro l’altra, come nel caso di una striscia con una sfumatura cromatica continua dal rosso al giallo attraverso l’arancione. Un altro esempio di relazione primaria è il rapporto percettivo di *incremento* (*Steigerung*), ad esempio quello che sussiste tra vari cerchi le cui dimensioni variano dal grande al piccolo o viceversa. In questo caso vi è certamente la percezione di figure singole,

ma ciò che caratterizza questa configurazione nel suo insieme è una “sintesi” che esibisce la serie di cerchi come una serie concatenata secondo una norma di incremento (o decremento) dimensionale. Questa sintesi non è il risultato di una proiezione intellettuale, ma fa corpo con la percezione stessa. Questo tema è qui appena accennato, ma contiene uno spunto che avrà pieno sviluppo negli sviluppi successivi della tematica fenomenologica.

– Alle *relazioni primarie* Husserl contrappone le *relazioni psichiche*, nelle quali la relazione non sorge dai contenuti, ma da un *atto psichico* che effettua la messa in relazione. Un discorso a parte deve essere fatto quando l’atto psichico è determinante per rendere conto della relazione, come è il caso di una molteplicità di oggetti intesi come oggetti del volere: ovviamente non si cercherà di rendere conto di questa relazione a partire dagli oggetti come tali. Ma a parte questo caso particolare, proprio per le considerazioni fatte poco fa, il collegamento collettivo andrà classificato tra le relazioni psichiche, tenendo conto del modo in cui abbiamo caratterizzato le relazioni primarie.

Riprobiamo così nello psicologismo? Non dobbiamo rimanere alla superficie delle parole, ma andare alla sostanza delle cose. Che cosa significa, in ultima analisi, nel contesto che stiamo delineando riferire il collegamento collettivo alle relazioni psichiche? Significa che, data una collezione possiamo variare arbitrariamente i fondamenti della relazione senza che con ciò debba venire meno la relazione stessa (ivi, p. 73) – in altri termini le relazioni che Husserl chiama qui psichiche sono semplicemente le relazioni non primarie. Questa precisazione tuttavia non ha carattere di dettaglio o di corollario aggiuntivo, bensì mostra che l’importante non è il riferimento alla psichicità, ma all’idea di *concetto formale*. Il senso effettivo della questione non sta nella terminologia psicologica. Tutto l’essenziale che si ha da dire, lo si può dire in altro modo.

– Il legame fondamentale che viene istituito attraverso il collegamento collettivo non è un legame percepito, ma un legame intellettuale, sia pure interpretato psicologicamente. Ciò ha una conseguenza importante sull'idea dell' "astrazione" da cui sorge il numero. Secondo la descrizione husserliana non accade che prima percepiamo i complessi con le loro determinazioni qualitative e poi "facciamo astrazione da esse". È vero invece che l' "astrazione" è data con la percezione stessa in quanto l'astrarre indica semplicemente *l'intendere le cose che sono fondamenti della relazione come "qualcosa in generale"*. «Ciò significa che la relazione in questione permane nella libera variazione delle determinazioni contenutistiche dei suoi termini. L'espressione 'qualcosa' indica dunque l'oggetto in quanto 'variabile' – forse si dovrebbe dire in quanto 'variabile generalizzata': l'oggetto inteso in senso matematico-formale o, come potremmo dire più brevemente, *l'oggetto matematico*» (Piana, 1967, p. 274).

– La nozione di variabile sta dunque prima della nozione di numero in quanto è implicata in essa nella stessa misura in cui è implicata nell'idea astratta di molteplicità. Due parole soltanto ci bastano per dare espressione elementare ad una molteplicità: la parola "qualcosa" e la paroletta "e". Diremo dunque "qualcosa e qualcosa e qualcosa, ecc."; ma anche "x e y e z, ecc."; oppure anche "Uno e uno e uno, ecc.".

– "Ma veramente di parole ne hai dette tre! Vi è anche l'*eccetera*".

– Osservazione quanto mai giusta. L'*eccetera* ha una funzione importantissima in rapporto al nostro tema affrontato in questo modo. L'*eccetera* significa che possiamo procedere in questo modo ottenendo molteplicità grandi a piacere.

– Ignacio Angelelli, che ha dedicato al problema dell'astrazione in Frege e in Husserl alcuni articoli in cui assume una posizio-

ne originale e inconsueta, manifesta perplessità sul modo in cui Husserl perviene dal concetto di molteplicità a quello di numero mediante l'astrazione, in un'accezione della parola che sembra riportare alla tradizione, ovvero all'astrarre inteso come prescindere dalle differenze mantenendo le proprietà comuni del campo di oggetti presi in considerazione. Egli osserva che «le sue istruzioni su come realizzare l'astrazione sono insufficienti, e in realtà inducono confusione. Fondamentalmente ci si dice di ignorare, 'astrarre' dalla natura degli elementi della molteplicità data ignorando così le loro differenze...» (Angelelli, 1997, p. 40) e, questa volta ragionando da fregeano, osserva che da questo modo di concepire l'astrazione si dovrebbe pervenire al concetto di “qualcosa”, così come nel caso dei famosi gatti di Frege – uno nero e l'altro bianco – non si ottiene certo il numero 2, ma eventualmente il concetto di “gatto”. Qui il “qualcosa” viene equiparato ad un concetto materiale (contenutistico), e quindi sembra che lo stesso Angelelli non tenga conto di questa importante differenza. Ma in realtà questa prima valutazione viene poi corretta e, anche senza usare la nostra terminologia, quella differenza viene formulata con sufficiente chiarezza con un rimando significativo alla logica “classica”.

– «La teoria classica della predicazione ha peraltro le sue buone cose, in ogni caso interessanti. Una di esse, condivise da Husserl ma non da Frege è un senso profondo delle grandi differenze tra i predicati che sono veri di un oggetto. Dai tempi di Aristotele, i predicati sono stati classificati in uno spettro molto ampio, a partire da quelli che sono essenziali o interni all'oggetto a quelli che sono rispetto ad esso puramente esterni... All'estremo esterno della gerarchia si trovano due tipi di predicati: 1. i predicati di origine psicologica (esempio tradizionale: 'La parete è vista') e 2. I cosiddetti predicati 'formali' ('essere qualcosa': aliquid, Etwas)» (ivi, 43).

– La pertinenza di questo richiamo, tenendo conto di ciò che abbiamo detto or ora in rapporto a Husserl, è evidente; così come la conseguenza che Angelelli acutamente ne trae: che il problema effettivo di Husserl è quello di rendere del tutto arbitrarie le molteplicità che sono il punto di avvio per la costruzione del numero. La luna, Napoleone e il rosso non hanno nulla in comune: il loro legame è appunto del tutto estrinseco, cosa che a Husserl sembra giustificare la natura puramente psicologica del collegamento collettivo. Ma il punto della questione non è questo – cosa che Angelelli mette in rilievo concludendo: «Io credo che i problemi relativi alla teoria della predicazione siano quelli più importanti e interessanti nel libro di Husserl, piuttosto che quelli relativi allo psicologismo di cui tanto si è chiacchierato. È tempo che gli studiosi Frege-Husserl diano rilievo ai temi della predicazione piuttosto che allo psicologismo» (ivi, p. 45)

– Sul problema dell'astrazione, anche Paolo Spinicci rileva (Spinicci 1987, p. 520) le insufficienze di alcune formulazioni husserliane che, sulla scia della tradizione, fanno poggiare questa nozione sulle proprietà comuni, e quindi sul concetto di genere, ma nello stesso tempo egli fa notare che Husserl è pienamente consapevole della peculiarità del “qualcosa”: «Si può infatti osservare in primo luogo che la relazione che sussiste tra un determinato oggetto e il concetto di ‘qualcosa’ che di quello si predica può solo esteriormente essere accostata alla relazione che lega l'individuo al suo *genus*, e questo perché nel caso in questione non abbiamo affatto a che fare con un concetto di genere. Dire di un oggetto che è un qualcosa non significa proporre un nesso di subordinazione logica» (ivi, p. 522). «Il concetto ‘qualcosa’... si rivela un puro concetto formale, una categoria, poiché attraverso di esso si determina esclusivamente la forma logica entro cui è sussunta una qualsiasi oggettualità concreta quando è posta all'interno del contesto di una possibile unità predicativa» (ivi, p. 524).

– Vogliamo ancora precisare: l’astrazione nel senso tradizionale del termine presuppone una molteplicità di individui provvisti di proprietà differenti e di proprietà comuni. Le proprietà comuni verranno “prese in considerazione” ai fini di una generalizzazione, mentre si prescindereà dalle proprietà differenti che sono invece individualizzanti. Questa duplicità del processo astrattivo non ha senso per l’operazione astraente di “formalizzazione”. Lo “svuotamento del contenuto” avviene per così dire in un solo passo e riguarda gli oggetti considerati come interi. Credo che ciò sia sufficiente per distinguere l’astrazione che dalla molteplicità conduce al numero dall’astrazione nel senso tradizionale (e di origine empiristica) del termine (cfr. in proposito Ravasio, 2013 p. 68).

Rappresentazione diretta e rappresentazione simbolica del numero

– Fin qui non ci siamo mai impegnati in considerazioni relative alla costruzione dei numeri secondo un sistema numerico vero e proprio. Una filosofia dell’aritmetica, così concepita, non comincia dall’aritmetica. Sappiamo anche già che non comincia dal contare, perché nonostante l’affiorare del problema della molteplicità molto grandi, fino a questo punto ci siamo occupati implicitamente di “piccole molteplicità” il cui numero può essere colto a colpo d’occhio. La formazione del numero precede il sistema numerico stesso, e dunque precede il concetto di calcolo e in particolare del conteggio, che presuppone già costituita la serie aritmetica. E va da sé che il due, ad esempio, non potrà essere presentato come la somma “1+1” ma come una molteplicità che potremmo rappresentare con due barrette.

| |

Con le barrette indichiamo semplicemente “qualcosa e qualcosa”, anche se naturalmente potremmo benissimo parlare di

esse come di due cose. Questo “due” è nome di un numero, ma va considerato come non ancora inserito in un *sistema* di nomi. Tuttavia se le due barrette vengono intese come segno numerico, ovvero come suo nome, e una barretta come segno dell’uno vediamo profilarsi nell’*ecceterazione* un’operazione di concatenazione che è il primo passo verso la formazione di un metodo notazionale per i numeri che ci conduce all’aritmetica “vera e propria”.

– Essa comincia esattamente quando la possibilità di una differenziazione percettiva si arresta. A colpo d’occhio arriviamo a giudicare forse che una molteplicità consta di cinque oggetti. Forse arriveremmo fino a dieci o dodici... ma oltre? Husserl stesso ricorda che presso alcuni popoli primitivi la lingua possiede parole che indicano numeri da 1 a 5, dopo di che viene usata solo la determinazione generica: molti. Sarebbe tuttavia erroneo pensare che si tratti di un sistema numerico per l’appunto molto primitivo – un sistema numerico rozzo e scarsamente adoperabile. È giusto invece dire che si tratta di uno stadio in cui la nozione di sistema numerico non è ancora acquisita. Tanto più allora la cosa ci sembra interessante, perché il concetto di numero appare in ogni caso già sussistente e proprio come *determinazione* possibile di una molteplicità. «I numeri sono le differenti specie del concetto generale di molteplicità. Ad ogni molteplicità concreta corrisponde una determinata molteplicità di unità, un numero cardinale» (Husserl, 1970, p. 222).

– Con l’*ecceterazione* si fa un passo avanti verso l’idea di sistema numerico, cioè verso l’idea della possibilità di far corrispondere un segno ad una determinata molteplicità in modo tale che la *concatenazione* dei concetti numerici si trovi rispecchiata nella costruzione dei segni che indicano quei concetti. L’intera seconda parte della *Filosofia dell’aritmetica* è dedicata proprio all’idea di sistema numerico connesso a quella del calcolo. Se fino ad un certo punto la nozione di nu-

mero può essere introdotta indipendentemente dal problema del calcolo, d'altro lato *si può parlare di aritmetica solo nel momento in cui disponiamo di un sistema numerico* e di conseguenza della possibilità di compiere operazioni sulla base di un sistema di segni ben determinato.

– *La distinzione tra rappresentazione diretta del numero e sua rappresentazione simbolica* assume conseguentemente un'importanza decisiva. Direttamente rappresentati sono i numeri colti a colpo d'occhio. Ma vi sono numeri di cui abbiamo un chiaro concetto senza che essi abbiano un “corrispondente intuitivo” in una molteplicità concreta. La molteplicità è allora – così si esprime Husserl – rappresentata solo indirettamente. Il che significa: mediante un *simbolo*.

– La nozione di simbolo viene così caratterizzata: «Una rappresentazione simbolica o impropria, indica il nome, è una rappresentazione con segni. Se un contenuto non ci viene dato direttamente per quel che è, ma solo in maniera indiretta attraverso *dei segni che lo caratterizzano in modo univoco*, allora di esso anziché avere una rappresentazione propria, si ha una rappresentazione simbolica» (Husserl, 1970, p. 193).

– «Il centro dell'intera argomentazione è la seguente: noi possiamo concepire in un modo proprio ed effettivo solo pochi numeri. La nostra capacità rappresentativa è limitata al punto che già per numeri al di là del tre noi non possiamo vedere distintamente le unità reali che effettivamente li compongono. Come può allora tutto ciò conciliarsi con il fatto che le operazioni aritmetiche trattando con numeri che sono ben più grandi e per i quali non è possibile alcuna rappresentazione propria, e con il fatto che l'aritmetica non si pone come un problema reale quello di non poter rappresentare questi numeri? In questo contesto, Husserl introduce la nozione di rappresentazione simbolica e

cerca di mostrare che i numeri e i metodi dell'aritmetica non sono propriamente concepiti come operazioni sui concetti stessi, ma come numeri e metodi simbolici, e che questa circostanza determina il senso e lo scopo dell'aritmetica» (Centrone, 2010, p. 30-31). «L'insistenza di Husserl su una giustificazione intuitiva del concetto di numero si ribalta dunque nella rivendicazione di una filosofia dell'aritmetica che ponga al proprio centro il fatto che l'aritmetica è installata sul piano del 'simbolismo'» (Piana, 1967, p. 277).

Problematica dei numeri immaginari

– Il fatto che ci si muova qui sul terreno dei numeri interi e che l'analisi riguardi le operazioni elementari dell'aritmetica, non deve trarre in inganno. Lo scopo effettivo che Husserl si propone è quello di motivare alla radice l'aritmetica in quanto disciplina capace di *estendere* il campo dei suoi oggetti – dal piano grossolano dei conteggi “primitivi” ai livelli aritmetici veri e propri. Tra gli stimoli della *Filosofia dell'aritmetica* e in particolare proprio in rapporto alla tematica della rappresentazione simbolica, vi è il problema di rendere conto dell'estensione del concetto di numero e in particolare dei numeri immaginari. In un notevole saggio dedicato all'idea husserliana di rappresentazione simbolica Jairo José da Silva sottolinea che «i numeri immaginari sono rappresentazioni improprie, cioè rappresentazioni senza oggetto che tuttavia vengono fatte passare come se denotassero qualcosa. A dispetto di questa apparente assurdità, gli immaginari sono in generale innocui e spesso usati nella matematica. Come possiamo spiegare il fatto che possiamo ottenere operando 'ciecamente' con simboli secondo regole, anche quando questi simboli non rappresentano nulla? Questo problema epistemologico si presentò ben presto nell'itinerario filosofico di Husserl e fu un fattore dominante nello sviluppo del suo pensiero» (Da Silva, 2010, p. 124).

– Vi è del resto un preciso riferimento di Husserl all'importanza che ebbe per la sua formazione lo scritto di Gauss *Theoria residuorum biquadraticorum* (II) (1831), e in particolare la comunicazione (*Anzeige*) che egli vi associa. Dice precisamente Husserl: «Forse contro i miei sforzi non si opporrà alcun pregiudizio sfavorevole se dico subito che devo le linee portanti delle mie nuove teorie allo studio delle note di Gauss sui resti biquadratici, note molto lette ma utilizzate in modo assai unilaterale» (Husserl, 1970, p. 7).

– In questo testo il grande matematico mostrava la possibilità di una rappresentazione “intuitiva” dei numeri immaginari – e più precisamente la possibilità di riprendere il metodo di far corrispondere ogni numero reale ad un punto di una retta e di farlo valere anche per i numeri immaginari, utilizzando in luogo della retta gli assi cartesiani. La questione in Gauss è spiegata in modo leggermente diverso ma conduce appunto a questo risultato: ad ogni numero immaginario viene assegnato una *coppia di numeri* – la parte reale all'asse delle x, la parte immaginaria all'asse delle y. In questo modo i numeri immaginari cessano di essere dei mostri del mondo ideale, anfibi tra essere e non essere come li aveva definiti Leibniz, ma diventa possibile formulare un vero e proprio calcolo, con le proprie operazioni e le regole ad esse relative. Nel suo libretto divulgativo esemplare soprattutto per i rapporti tra matematica e fisica, *Introduzione alla matematica*, Alfred North Whitehead nota che «l'idea di determinare la posizione di un punto mediante le sue coordinate non era affatto nuova in quell'epoca in cui si stava formando la teoria degli ‘immaginari’», ma «l'idea della coppia ordinata come entità a sé sorse più tardi ed è il risultato degli sforzi che vennero compiuti *allo scopo di interpretare gli immaginari nel modo più astratto possibile*» (pp. 79-80. Corsivo mio). Essendo indubbio che l'interpretazione gaussiana, passando attraverso il riferimento geometrico, seguendo una via da altri precedentemente battuta, intende poi fare ritorno ad

un livello puramente aritmetico di grado superiore, mi chiedo se ciò che afferma Whitehead non semplifichi alquanto le cose quando dice che il problema di Gauss era quello di «interpretare gli immaginari nel modo più astratto possibile». D'altronde vi è chi la pensa diversamente. Ad esempio, nella *History of Mathematics*, che ebbe una certa importanza ai tempi suoi, Florian Cajori osserva che «La connessione tra numeri complessi e punti sul piano, benché artificiosa (*artificial*), costituì un ausilio potente negli studi successivi di algebra simbolica. *La mente richiedeva una rappresentazione visiva al fine di riceverne aiuto*» (Cajori, 1894, pp. 317–318) (corsivo mio).

– In realtà in casi come questi è quanto mai opportuno ritornare ai testi originali. In effetti Gauss stesso segnala nella *Comunicazione alla Theoria residuorum biquadraticorum* (II) che il filo che l'aveva condotto a questo risultato era stata una possibile analogia con la rappresentazione dei numeri reali attraverso una retta. “Così come i numeri interi assoluti possono essere rappresentati attraverso una serie ordinata di punti a distanze eguali in una linea retta, nella quale il punto iniziale è il numero 0, il successivo 1, ecc.; e così come al fine della rappresentazione dei numeri negativi si richiede soltanto un prolungamento illimitato di questa serie dal lato opposto del punto iniziale: nello stesso modo per la rappresentazione dei numeri complessi...”. (Gauss, 1876, p. 174). Ma questa frase si apriva con queste parole: «Dobbiamo aggiungere alcune osservazioni di carattere generale. Il fatto di riportare la teoria dei resti biquadratici nel campo dei numeri complessi potrebbe a taluni che hanno poca dimestichezza con le grandezze immaginarie e che di conseguenza diventano prigionieri di false rappresentazioni, apparire urtante e motivare l'opinione che questa ricerca sia campata in aria e riceva un andamento fluttuante, per il fatto che si allontana dal terreno intuitivo (*Anschaulichkeit*). Ed invece nulla sarebbe più infondato di una simile opinione. Al contrario l'aritmetica dei numeri complessi è capace delle più in-

tuitiva resa sensibile (*Versinnlichung*). E sebbene l'autore nella sua esposizione precedente abbia seguito una trattazione aritmetica, tuttavia egli ha anche per questa fornito l'evidenza (*Einsicht*) e quindi i necessari accenni alla resa sensibile (*Versinnlichung*) che saranno sufficienti per il lettore che sa pensare per conto suo» (ivi).

In realtà bastano queste poche citazioni per comprendere l'interesse che Husserl poteva provare per il lavoro di Gauss. In esse è implicitamente tracciato un percorso che prendendo l'avvio da una forma aritmetica ad un tempo utile e inesplicabile e che rimanda ad una pura convenzione segnica, opera una sorta di regressione al "piano intuitivo" che consente di darle "un corpo visibile" – così mi sembra debba essere interpretata la *Versinnlichung* – in modo tale che quella convenzione viene fatta rientrare in un *sistema di segni* che ha carattere di calcolo e che trae da quella regressione la propria subordinazione al concetto "numero". Se questa mia interpretazione è corretta, qui sono in gioco i temi di fondo della *Filosofia dell'aritmetica*.

L'argomento naturalmente può essere discusso a fondo anche rispetto ad altri testi di Husserl, in particolare, la recensione a Schröder (Husserliana, XXII, pp. 3 sgg.) e le lezioni tenute a Göttinga su questo stesso argomento nel 1901 (Husserliana, XII, pp. 430 sgg.). Ma qui possiamo rimandare alla letteratura secondaria, ed anzitutto a quello che può essere considerato probabilmente il primo lavoro di largo impegno sull'importanza del problema logico-matematico lungo l'intero percorso filosofico di Husserl. Si tratta del lungo saggio di Bernhold Picker, *Die bedeutung der Mathematik für die Philosophie Edmund Husserls* (Picker, 1963). Per quanto riguarda il problema attuale è notevole il fatto che Picker sottolinei che «Gauss sostiene che l'aritmetica ha esteso il suo campo gradualmente e che i primi algebristi avevano denominati falsi anche i numeri negativi. Questa concezione rimase in vigore finché non si riconobbe che i numeri positivi e negativi non dovevano essere applicati ad oggetti singoli considerati di per stessi, ma solo a relazioni tra due oggetti» (Picker, 1963 p. 277). Questa af-

fermazione si ritrova letteralmente proprio alla fine della *Filosofia dell'aritmetica* all'inizio del capitolo sulle fonti logiche dell'aritmetica: «Abitualmente si definisce l'aritmetica come scienza dei numeri. Questa definizione però non è sufficientemente chiara. I singoli numeri, considerati per sé, non forniscono alcun motivo per il trattamento che conduca alla conoscenza, e quando si parla di particolari qualità intrinseche di singoli numeri, da fondarsi scientificamente, si tratta sempre di caratteristiche che spettano a loro a causa di certe relazioni che sono collegate a classi di altri numeri intere o parziali. Solo a partire dalle relazioni che i numeri intrattengono tra loro possono scaturire problemi che richiedono un trattamento logico. Perciò sarebbe meglio definire l'aritmetica come la scienza delle relazioni numeriche. In ogni caso il suo compito scientifico consiste nel trovare numeri a partire da quelli dati, in virtù di certe relazioni già fra loro sussistenti» (Husserl, 1970, p. 256). Ed è ancora Gauss che merita di essere ricordato in rapporto a questa affermazione di Husserl: «Il matematico astrae interamente dalla qualità degli oggetti e dal contenuto delle loro relazioni; egli ha a che fare soltanto con il conteggio (*Abzählung*) e con la comparazione delle relazioni tra loro» (Gauss, 1876, p. 176).

Lo zero e l'uno

– È chiaro che la distinzione tra rappresentazione propria o diretta e rappresentazione simbolica o indiretta fa tutt'uno non solo con il riconoscimento di due livelli dell'analisi tra loro correlati “geneticamente”, un livello che aritmetica non è (ancora) e un livello propriamente aritmetico, ma anche con l'idea di un modello di chiarificazione concettuale che, per così dire, passa attraverso questi due livelli.

– Per illustrare questo punto ci si può limitare ad illustrare il senso delle *espressioni* uno e zero. Non a caso non parlo senz'altro

di numeri. Io ti dico, ad esempio, di aver incontrato “un uomo”. Ma se volessi con ciò indicare che ho incontrato un uomo e non due – attribuendo ad “uno” un significato numerico, probabilmente dovrei ricorrere a qualche artificio esterno, anche soltanto ad un’accentuazione della voce su quella parola. La stessa parola “uno” può essere impiegata come un numerale oppure come un articolo indeterminato – e beninteso per noi si tratta di un’equivocità significativa e niente affatto accidentale. Vi è da parte di alcuni logici e filosofi del linguaggio una sorta di orrore dell’equivoco verbale, mentre ci sono parole la cui equivocità ci può insegnare qualcosa. In questo caso noi non ammoniamo il nostro interlocutore a non confondere i due sensi della parola “uno”. Al contrario diciamo: badate come sia significativo che questa parola possa avere questi due sensi!

– Nella formulazione “uno e uno e uno, ecc.” “uno” *compare come articolo indeterminato*, come se scrivessimo “un... e un... un...”, avvertendo che al posto dei puntini potremmo mettere nomi qualunque. Questa ambivalenza grammaticale ha tuttavia per noi una ragione profonda nella stessa istituzione del concetto di numero. Alla sua base, non vi è l’1, ma la forma vuota: l’oggetto matematico. Nello stesso tempo gli oggetti matematici considerati come elementi di una molteplicità potranno essere considerati come “unità”, cioè come elementi di cui consiste la molteplicità. Vi è dunque un passaggio dalla nozione del “qualcosa” alla nozione dell’unità: *l’unità è il qualcosa considerato dal punto di vista della nozione di molteplicità e in opposizione ad essa.*

– Perciò dal *punto di vista prearitmetico* l’uno non è affatto un numero e tanto meno lo zero. Da ogni parte si odono voci di proteste – la più forte e prepotente di tutte è quella di Frege: il numero risponde alla domanda “Quanti?” e tutto ciò che possiamo dire rispondendo a questa domanda merita a pieno titolo il nome di numero. Dunque anche l’1 e lo 0 sono numeri, perché

alla domanda “Quanti” si può benissimo rispondere “13” ma anche “1” oppure “0” (Frege, 1884, p. 279– 280).

– Nel rispondere a questa possibile obiezione Husserl distingue, nella risposta alla domanda “Quanti”, le risposte negative dalle risposte positive, ed è una distinzione piuttosto sottile e acuta (Husserl, 1970, p. 130).

– “Quanti sono?” – ovvero: “Di che molteplicità si tratta” chiede il logico fregeano. E la risposta potrebbe essere: “Ma non lo vedi? Qui c’è solo una cosa, quindi non abbiamo a che fare con una molteplicità, ma con un’unità”. L’espressione usata da Husserl è *Nicht-viel*, che indica l’opposizione alla molteplicità (ivi, p. 131).

– Oppure: qui non vi è nessun oggetto, quindi non vi alcuna molteplicità, e nemmeno un’unità. E questo è il senso della risposta con lo zero.

– In altri termini, ammettiamo la domanda relativa al numero nella forma “Quanti sono?”, ma ne analizziamo il senso.

– Quanti sono? Potrebbe essere analizzata così: “Qui vi è una molteplicità. Ti prego di determinarla”. O anche, in forma interrogativa: “Qui c’è una molteplicità? E se c’è, quanti sono i suoi elementi?”

– È chiaro che questa esclusione dell’1 e dello 0 dal punto di vista della produzione primitiva del concetto di numero è una diretta conseguenza dell’impostazione proposta. Se i numeri sono *specificazioni* della nozione primaria di numero (molteplicità) allora non potremo considerare un oggetto come un caso speciale di molteplicità. A maggiore ragione ciò vale nel caso dello zero. Tuttavia, la loro introduzione in quanto numeri fa tutt’uno con la posizione di un sistema numerico e del calcolo aritmetico. Alla

luce di ciò si comprende come Husserl sottolinei con forza l'importanza dell'introduzione dello zero e dell'uno come numeri notando nello stesso tempo come questa introduzione non sia affatto ovvia, in specie per lo zero. Mentre l'uso calcolistico dell'1 come numero ci è imposto già nel periodo prescientifico dell'aritmetica, dell'introduzione dello zero «che richiede una visione aritmetica relativamente sviluppata» siamo debitori alla saggezza indiana.

– Lo zero ha una funzione di primaria importanza per l'introduzione – così decisiva per il sorgere dell'aritmetica – del sistema posizionale indiano: tale sistema «deve la propria brevità e la possibilità di venire abbracciato con un solo sguardo al fatto che al suo interno le cifre sostituiscono le parole scritte designanti numeri e l'ordinamento lineare intuitivo viene utilizzato come strumento di designazione sistematico per l'ordinamento dei numeri di livello, sebbene divenga superfluo designare in maniera particolare le unità di livello... Certo una simile modalità di designazione divenne possibile solo dopo l'invenzione della cifra zero, che ha la funzione di marcare la caduta di un numero di livello e di mantenere tuttavia la completezza della serie dei livelli sulla quale si basa il giudizio che valuta la posizione» (Husserl, 1970, p. 244). La storia del numero 1 e dello 0 dovrebbe insegnare qualcosa.

– Peraltro anche dopo l'introduzione calcolistica di 1 e 0 come numeri, essi mantengono anche nel calcolo una posizione particolare. Cosa naturalmente negata da chi contesta questa impostazione che farà valere l'idea che in fin dei conti ogni numero ha le proprie particolarità, ad esempio, è pari o dispari, ha determinati divisori, è numero primo ecc. ma che « queste caratteristiche particolari saltano sempre meno agli occhi, via via che il numero diventa più grande. È dunque totalmente arbitrario voler introdurre una differenza di genere. Tutto ciò che non si addice allo 0 e all'1 non può risultare essenziale per il concetto generico di numero» (Frege, 1884, p. 279– 280).

– Ciò che il sottile logico non vede – e naturalmente per precise ragioni – è che nelle particolarità dell'1 e dello 0 è implicato l'altro grande concetto costitutivo dell'aritmetica – e precisamente il concetto di operazione, e dunque di calcolo. L'addizione con lo zero non opera nessun incremento, così come la sottrazione nessuna diminuzione. Per qualunque numero, la moltiplicazione per 0 è eguale a 0, e la divisione per 0 non si può fare ovvero non ha senso. La moltiplicazione per l'1 non moltiplica, la divisione con l'1 non divide. Husserl fa notare che si tratta di «particolarità manifestamente di tutt'altro genere che quelle che spettano ai numeri specifici» (Husserl 1970, p. 133). Nel comportamento dell'1 e dello 0 va individuata una vera e propria differenza *logica* che ha il suo fondamento nella diversità della sua *Begriffsbildung*. Nel caso dei numeri, il processo rinvia alla nozione di molteplicità, nel caso dell'1 e dello 0 alle procedure di calcolo ed alla serie aritmetica vera e propria. Questa differenza non può essere colta o non avere particolare rilievo per chi esclude, dall'ambito delle considerazioni logiche, il punto di vista della “formazione del concetto”. In realtà vi sono differenze concettuali che possono essere chiarite e spiegate solo attraverso il rimando all'origine.

Le operazioni pre-aritmetiche

– Un altro notevolissimo esempio della differenza e della relazione tra piano pre-aritmetico e piano aritmetico riguarda il problema delle operazioni. *Operare* ha naturalmente due significati nettamente differenti.

– Quali operazioni possiamo eseguire su molteplicità concrete? Non è difficile rendersi conto che le operazioni fattibili sono solo due: l'*unificazione* e la *separazione*. Ed alludiamo proprio al fatto di avere di fronte a noi dei gruppi di sassolini. Non possiamo fare altro.

– Di due gruppi ne facciamo uno solo (il modo in cui operiamo di fatto – se con le mani o coi piedi, se spostiamo il gruppo di destra su quello di sinistra o inversamente, è del tutto indifferente). Husserl chiama questa operazione *connessione additiva* (*additive Verknüpfung*): un nome nuovo perché questo collegamento è cosa del tutto diversa dal *collegamento collettivo*. Ed è appena il caso di dire che non è nemmeno un’addizione in senso aritmetico. Passando a livello aritmetico, il primo risultato che otteniamo, riguarda la moltiplicazione. Essa verrà considerata come un caso particolare di addizione, o più precisamente come un modo di notazione abbreviativo rispetto alla notazione dell’addizione, cosa sulla quale a questo livello non vi è nulla da eccepire. Facendo riferimento alla “storia del concetto” si vede subito che in questo modo vengono tolte di mezzo importanti differenze. Accade invece che nella moltiplicazione dobbiamo distinguere il moltiplicando dal moltiplicatore, e il moltiplicatore è un nuovo tipo di numero, che non compare nelle considerazioni a livello pre-aritmetico. Del resto noi non risolviamo una moltiplicazione analizzandola nelle addizioni corrispondenti, ma adottiamo una particolare procedura di calcolo. Ed è chiaro che non appena i numeri siano anche poco elevati l’analisi in termini di addizione non possa nemmeno essere praticata (Husserl, 1970, p. 187).

– Da un punto di vista astrattamente logico, contrapponiamo un punto di vista che rileva precise differenze concettuali, le quali valorizzano il *momento calcolistico* del pensiero matematico come *pensiero effettivamente produttivo*. Husserl anticipa di molti anni una linea di discorso che ritroviamo nelle *Osservazioni sui fondamenti della matematica* di Wittgenstein, non certo per influenza diretta, ma probabilmente in forza di una somiglianza di atteggiamento che in parte dipende dalla comune polemica nei confronti delle posizioni logiciste.

– Il discorso sul fatto che, ad esempio, l’introduzione di un

nuovo simbolo come l'elevazione alla potenza non sia semplicemente simbolo abbreviativo per la moltiplicazione di fattori eguali – evidentemente un caso analogo alla moltiplicazione rispetto all'addizione – lo si ritrova per esteso nelle *Osservazioni sui fondamenti della matematica* a proposito dell'elevazione a potenza.

– «Quando chiedo: che cosa c'è di nuovo nel 'nuovo genere di calcolo' dell'elevazione a potenza? – è difficile rispondermi. La parola 'nuovo aspetto' è vaga. Vuol dire che ora vediamo la faccenda in modo diverso – ma la questione è: qual è la manifestazione essenzialmente *importante* in 'questo vedere in modo diverso'? Per prima cosa voglio dire: 'Il fatto che in certi prodotti tutti i fattori siano eguali non avrebbe mai dovuto *sorprendere* nessuno' – oppure 'Prodotto di fattori tutti eguali' è un nuovo concetto – oppure ancora: 'Il nuovo consiste in questo: che ora classifichiamo i calcoli in modo diverso'. È chiaro che nell'elevazione a potenza l'essenziale è che guardiamo al numero dei fattori... Un nuovo aspetto – ma ancora: qual è il suo lato importante? A che scopo utilizzo ciò che mi ha sorpreso? – Ebbene prima di tutto, forse, lo deposito in una notazione. Così per esempio, scrivo a^2 in luogo di 'a * a'. Così facendo mi riferisco alla successione numerica (alludo ad essa) e questo, prima, non era accaduto. Dunque stabilisco una nuova connessione! – Una connessione – tra quali cose? Tra la tecnica dell'enumerare i fattori e la tecnica del moltiplicare» (Wittgenstein, 1971, II, oss. 47, pp. 114–5. Cfr. Piana, 1973, p. 208).

– Abbiamo detto che solo due sono le operazioni che si possono compiere sul piano prearitmetico, l'unificazione e la separazione. E manifestamente la separazione è l'operazione inversa dell'unificazione. Sul piano aritmetico saremo tentati di rispondere senz'altro: la sottrazione. Ora scopriamo che nello statuto *logico* di base – perché qui veramente non vi è proprio nullo di psicologico o di psicologistico – l'inversa dell'unificazione è la

Teilung, che puoi tradurre con separazione o con partizione. E che, stando sulla base delle “operazioni dirette” – cioè sulle operazioni condotte sulle molteplicità concrete – sottrazione e divisione sono da associare insieme in quanto operazioni di partizione. Nel caso della sottrazione, di una unica molteplicità, ne realizzo due per separazione: e si comprende che questa separazione possa essere intesa come un togliere una parte e che si possa porre il problema del determinare il numero della parte rimanente. Mentre nel caso della divisione, che sul terreno aritmetico considereremo come operazione inversa della moltiplicazione, sul piano pre-aritmetico si presenta come un caso particolare della separazione esattamente come la sottrazione. Del resto anche nel linguaggio corrente dividere significa “suddividere”, “separare” – occorre naturalmente aggiungere: in parti eguali. L’operazione del separare viene dunque precisata, anche in questo caso, fissando un compito. Ad esempio: separare un aggregato in quattro parti eguali e determinare il numero di cui consta ogni parte.

– L’esecuzione diretta di una simile operazione potrà avvenire nel modo in cui la nozione di divisione viene talvolta insegnata nella scuola elementare. Abbiamo dodici sassolini e dobbiamo consegnarli in parti eguali a quattro persone. Allora cominciamo a darne una a ciascuno ripetendo il giro fino a esaurimento. Poi “contiamo” quanti sassolini ha ricevuto ciascuna persona.

L’invenzione dell’aritmetica

– Tutto cambia quando possiamo avvalerci di una *notazione aritmetica* che ci consenta di fare *calcoli*. Potremmo dire che l’invenzione di una notazione aritmetica che ci consenta agevolmente di fare calcoli senza *pensare* al numero è *l’invenzione dell’aritmetica*.

– La *Filosofia dell’aritmetica* si avvia nella sua seconda parte pro-

prio assumendo nettamente questa direzione. Le parole chiave sono *segno*, *simbolo*, *rappresentazione diretta* e *rappresentazione indiretta* ovvero *simbolica*. E infine: *calcolo*. La rappresentazione diretta del numero come rappresentazione diretta della molteplicità è ormai del tutto superata. Attraverso segni si può ottenere una rappresentazione indiretta di tutti i numeri possibili.

– Anzitutto “il sistema numerico non è un mero metodo per contrassegnare concetti dati, quanto per costruire nuovi concetti e per fornire, insieme alla costruzione, una designazione” (Husserl, 1970, p. 234). Esso deve consistere in un sistema di nomi che seguano la stessa logica costruttiva dei concetti numerici da essi denominati. A questo scopo è essenziale la scelta di una “base” la cui scelta deve essere subordinata alla semplicità nella pratica del calcolo.

–«Un rigoroso parallelismo sussiste qui tra il metodo dello sviluppo della serie dei concetti numerici e il metodo dello sviluppo dei segni numerici... e la sistematica dei segni non è meno coerentemente in sé conclusa che quella dei concetti...» (ivi, p. 237). Ciò consente la totale sostituzione dell’operare su concetti con l’operare sui loro nomi. «Si segue semplicemente la sistematica delle designazioni e si ottiene infine un segno composto il cui modo di formazione cela esattamente quello del concetto ricercato. Lo stesso vale... per il calcolare: non si tratta di un’attività con concetti ma con segni» (ivi, p. 240).

Il metodo logico dell’aritmetica

– “Il metodo dei segni sensibili è dunque il metodo logico dell’aritmetica. Qui si offre quel concetto di calcolo che, in riferimento all’estensione della sua applicazione, possiamo designare come il più usuale. Esso abbraccia ogni derivazione simbolica di numeri da numeri, che si basa principalmente su operazioni regolate da segni sensibili” (Husserl, 1970, p. 257).

– L’accezione in cui è assunta la parola *simbolo* dipende strettamente dal contesto: da un lato si contrappone alla rappresentazione diretta della molteplicità, dall’altro si richiama ad un piano puramente segnico. Ma la scelta della parola “simbolo” intende rimandare ad un significato possibile. Il punto su cui Husserl insiste è che «mentre il calcolare è un’attività che procede con segni e non con concetti, tuttavia alla fine di ogni calcolo il risultato ottenuto è il segno per un concetto numerico, e come tale va interpretato» (Centrone, 2010, p. 28).

– Questa traccia che va dal pensiero al segno ma che deve tornare al pensiero è anche naturalmente la ragione che spiega i futuri dubbi di Husserl su un formalismo che tende a non effettuare questo ritorno e che si propone in qualche modo come valido in se stesso. «Come matematico educato alla fine del diciannovesimo secolo, Husserl era naturalmente sospettoso rispetto ai possibili eccessi della svolta che questa scienza stava effettuando... Ma egli vide le immense possibilità di una matematica puramente formale; cosicché se ne fece sostenitore dando ad essa una dignità epistemologica (matematica formale come capitolo della ontologia formale), ma con una nota di cautela (le teorie formali debbono essere applicabili)» (Da Silva, 2010, p. 140).

– L’aritmetica vera e propria può sorgere solo sul piano segnico-notazionale, da intendere nel senso della rappresentazione simbolica. Si coglie ormai una direzione “formalistica” nella riflessione sui fondamenti dell’aritmetica che è il vero motivo delle reazioni all’opera di parte logicista. (Anche considerando l’intera questione da questo lato si comprende che la critica delle inflessioni psicologistiche indiscutibilmente presenti nell’opera sono irrilevanti per il suo contenuto sostanziale).

– Sul piano aritmetico le operazioni si caratterizzano per il fatto che esse vengono effettuate non già sulle molteplicità stesse, ma

sui loro segni, sui numeri come simbolizzazioni di molteplicità. Nei simboli numerici la molteplicità è solo indirettamente intesa, non vi è nessuna molteplicità intuitivamente corrispondente. Le operazioni di calcolo, quando il sistema numerico è costituito, saranno allora pure e semplici operazioni di trasformazione dei segni numerici stessi. Va da sé che «solo dal concatenamento sistematico dei concetti che ne stanno alla base e dalle relazioni dipende in effetti che le designazioni corrispondenti si concatenino per formare un sistema conseguente e si stabilisce così con sicurezza che a ogni deduzione di segni e relazioni tra segni a partire da segni dati, logicamente corretta secondo le regole dei *segni*, corrisponda una deduzione di concetti e di relazioni concettuali a partire da concetti dati, compiuta correttamente nel senso dei *pensieri*» (Husserl 1970, p. 259).

– L'intera tematica della genesi intuitivo-concreta del concetto di numero si prolunga in una concezione dell'aritmetica nella quale deve essere valorizzato il momento segnico-notazionale, quindi il momento calcolistico-simbolico come il momento realmente caratteristico e fondamentale di questa scienza. L'intuitività è naturalmente ancora decisiva, ma *essa ha ora il senso della pura visibilità del segno e, attraverso il segno, della relazione con il concetto.*

Aritmetica e arte del calcolo

– Diventa a poco a poco chiaro che l'idea del calcolo non interessa soltanto l'aritmetica nel senso fin qui inteso, l'aritmetica che ha a che fare con i numeri – *l'aritmética numerosa*. Essa può essere generalizzata: con “calcolo” o “algoritmo” possiamo intendere «ogni specie di derivazione di segni da segni all'interno di un qualsiasi sistema segnico algoritmico secondo le ‘leggi’, o meglio, convenzioni, del connettere, della separazione e della trasformazione che sono propri del sistema in questione» (Husserl, 1970, p. 258).

«Ora che abbiamo introdotto questo nuovo concetto di cal-

colo il rapporto tra aritmetica e arte del calcolo è cambiato del tutto. Se stacciamo i segni numerici dai loro correlati concettuali e senza preoccuparci delle possibili applicazioni concettuali, formiamo da un punto di vista tecnico i metodi che il loro sistema ammette, abbiamo estratto allora la pura meccanica del calcolo che sta alla base dell'aritmetica e stabilisce il lato tecnico della sua metodica. L'arte del calcolo, chiaramente, non può più essere identica con l'arte della conoscenza *aritmetica*» (ivi, 259).

Con l'arte del calcolo così intesa entriamo ormai nel regno di Hilbert: «È un fatto assai rilevante per una più profonda comprensione della matematica che un solo e medesimo sistema di simboli possa servire a più sistemi concettuali che, diversi tra loro per contenuto, presentano delle analogie solo nella forma della loro costruzione. Essi allora, come diremo meglio, vengono dominati attraverso il medesimo sistema di calcolo» (Husserl, 1970, p. 258). (cfr. anche Picker, 1963, p. 295).

Il problema della computabilità

– Uno dei meriti di Stefania Centrone è indubbiamente quello di attirare l'attenzione sul capitolo XIII della *Filosofia dell'aritmetica* e, in particolare, sull'affiorare, attraverso l'apparato concettuale istituito da Husserl, della problematica della “computabilità”, sia pure in forma embrionale e per accenni di carattere generale. La questione si pone in effetti nel momento in cui Husserl si dispone sul terreno del calcolo, distinguendo un metodo concettuale, cioè un metodo che procede tenendo fermo il concetto di numero, nei quali i segni “hanno un significato solo secondario”, da un metodo mediante segni sensibili, nel quale il concetto sta solo all'inizio ed al termine del processo, arrivando alla conclusione che «il metodo basato sui segni è concreto, sensibile e universale e facile da maneggiare anche con un esercizio minimo. Dico apposta universale perché non è pensabile alcun problema che non si possa risolvere con il suo ausilio. Così tale metodo,

rende il primo, quello concettuale, del tutto inutile. Alla fine, il metodo concettuale può trovare applicazione non nell'ambito della pratica scientifica, ma solo in un ambito in cui vigono capacità mentali simili a quelle dell'infanzia» (Husserl, 1970, p. 257).

– È evidente da questo riferimento all'infanzia che il concetto di numero di cui si parla e dell'operare attraverso un metodo concettuale rimanda al livello degli insiemi concreti, dunque al livello che noi abbiamo chiamato prearitmetico. Tanto più assume importanza il passaggio al livello simbolico, a cui è appunto dedicato il capitolo finale dell'opera.

– In questo contesto si annuncia il problema della “computabilità”. Gli esempi sono, nello stile dell'opera, del tutto elementari. La sottrazione non sempre ha una soluzione – ciò accade quando il minuendo è minore del sottraendo (p. 269); e lo stesso vale per la divisione: «Anch'essa è limitata quanto alla propria eseguibilità, nella misura in cui possono essere divisi per a parti eguali solo numeri b che siano multipli di a » (Husserl, 1970, p. 271).

– Ma naturalmente tutta questa tematica è orientata verso un orizzonte di particolare complessità. Il problema che si pone, osserva Husserl, è che «una soluzione va trovata già per il fatto che si deve sapere prima dell'inizio del calcolo, se si potrà avere un risultato, se il problema posto non includa a priori qualcosa di impossibile»; e d'altra parte «il decorso delle operazioni parziali che qui vanno eseguite (in modo simile a quello che accade con la divisione e la sottrazione) subisce delle modificazioni a seconda della possibilità o dell'impossibilità di ciò che viene posto all'inizio» (ivi, p. 278).

– A questi aspetti si richiama Stefania Centrone per affermare che «la nostra tesi è che Husserl abbia una chiara intuizione di quella classe di funzioni che, nella terminologia logica corrente,

è conosciuta come ‘classe delle funzioni numeriche parzialmente computabili’. Il problema di una rigorosa caratterizzazione di questa classe – è utile ricordarlo – fu esplicitamente e sistematicamente affrontato solo negli anni trenta, nel contesto della teoria della computabilità effettiva nella matematica (nelle opere di A. M. Turing, A. Church, K. Gödel, S.C. Kleene e altri)» (Centrone, 2010, p. 47). Una tesi tanto impegnativa è appoggiata dall’autrice da un’appendice a cui naturalmente si rimanda per ogni approfondimento.

VII

L’aritmetica senza l’astrazione

Le citazioni tratte dalle *Grundlagen der Arithmetik* di Frege fanno riferimento nel numero di pagina alla prima edizione del testo tedesco stampato a Breslau nel 1884.

Il grande pensiero di Frege

– L’unità tra logica e aritmetica è il *grande pensiero* di Frege. Si è trattato di una vera e propria rivoluzione nella concezione della logica, come è stato detto da molti, o addirittura della filosofia? In un notevole saggio in cui questo problema viene posto Carlo Cellucci lo nega con ottime ragioni (Cellucci, 2003) e lo ribadisce contro quella che egli chiama «l’ortodossia prevalente» nel volume *La filosofia della matematica del novecento* (Cellucci, 2007), nel quale è dato leggere, io credo, una delle più sintetiche e nello stesso tempo più lucide esposizioni dei punti nodali del pensiero fregeano.

– Ma certamente non si può dubitare della grandiosità del progetto e delle dimensioni del movimento di pensiero che esso ha messo in moto. *Se vuole essere viva, la filosofia deve muoversi dinamicamente attraverso i possibili diversi punti di vista.* E questo vale

naturalmente anche per la filosofia della matematica, tanto più in presenza di diverse scuole di pensiero. Credo però che si debba dire fin dall'inizio che l'idea di questa unità, fino ad un passato abbastanza recente, è per lo più entrata nelle nostre aule universitarie con il severo spirito che era proprio dello stesso Frege che, quanto alla distinzione tra vero e falso, era piuttosto intransigente. Che aritmetica e logica facessero tutt'uno e che la teoria degli insiemi potesse valere come teoria fondazionale per qualunque concetto matematico-formale in generale (fondendo e confondendo questi due diversi problemi fra loro) era presentata come *una verità finalmente rivelata*. E chi mai poteva esserne il profeta se non Gottlob Frege, che taluni hanno dichiarato essere “il più grande logico di tutti i tempi”? (A dire il vero l'idea che, valendo il principio di contraddizione in entrambi i campi, e del resto anche nella geometria, Leibniz manifesta la convinzione che «ce seul principe suffit pour demonstrier toute l'Arithmetique et toute la Geometrie, c'est à dire tous les Principes Mathematiques» (Leibniz 1975, VII, p. 755). Ma si tratta evidentemente di un'affermazione al tempo stesso troppo forte e troppo debole, priva del resto di un'effettiva elaborazione sistematica, per poter essere considerata un autentico precedente).

Il numero si enuncia di un concetto

– Come spesso accade, idee destinate a sviluppi di particolare complessità hanno alla loro base tesi relativamente a portata di mano e comunque non difficili da formulare alla breve: le complicazioni sorgono quando si comincia a edificare. Anzi forse ancora un poco prima – quando si tentano le prime elaborazioni per mettere alla prova quelle tesi in vista di un'edificazione futura. Nel nostro caso, l'idea iniziale può essere formulata dicendo che il numero è sempre relativo ad un “concetto”, dove concetto ha il significato tradizionale di proprietà che può essere “predicata” di un oggetto.

– È bene prestare molta attenzione alle formulazioni direttamente fregeane. All’inizio del par. 45 delle *Grundlagen der Arithmetik*, Frege osserva: «Il numero non è ottenuto per astrazione dalle cose come il colore, il peso, la durezza, non lo è nel senso in cui lo sono le proprietà delle cose. Resterebbe ancora la domanda di che cosa viene enunciato qualcosa mediante una specificazione numerica (*Zahlenangabe*)» (Frege, 1884, p. 58). È a questa domanda che si dà la risposta cruciale secondo la quale la specificazione numerica contiene un enunciato (*Aussage*) relativo ad un concetto (ivi, p. 29). Cruciale perché da esso, con tutti i perfezionamenti del caso, deve poter essere estratto tutto il programma logicista.

– A tutta prima questa risposta appare sorprendente: non sono le cose a cui spetta primariamente un numero – non sono le cose ad essere in certo senso “numerose”, ma il numero sarebbe inerente ad un predicato che quelle cose “raccolge insieme”. Sorprendente ma necessario, se si vuol legare a fil doppio aritmetica e logica. Le *cose* ritorneranno ad essere importanti, come “estensioni” del concetto, ma proprio questa qualificazione fa sì che esse, quando torneranno ad essere importanti, saranno *inghiottite* dal concetto.

– È certo piuttosto singolare il fatto che per comprovare esemplificativamente questa risposta Frege scelga proprio il numero zero, ovvero la proposizione «il pianeta Venere ha zero satelliti». Qui le cose addirittura non ci sono, «non vi è proprio alcun satellite di Venere o aggregato di satelliti di cui qualcosa possa essere enunciato. Invece al concetto ‘satellite di Venere’ viene attribuita una proprietà, cioè quella di non comprendere nessun oggetto sotto di sé» (Frege, 1884, p. 59).

– Lo zero – in certo modo l’ultimo nato, fra i numeri – e comunque un numero assai poco “numeroso”! Ma non a caso Frege dedica diverse pagine per sostenere che nulla contraddistingue lo 0 e l’1 da qualunque altro numero. Ed in generale

si potrebbe sostenere che questi due numeri siano gli autentici protagonisti delle *Grundlagen*. Non già certamente per mettere in questione la loro esistenza, di cui non vi è certo bisogno; ma per trovare per essi una caratterizzazione puramente logico; insieme naturalmente all'altro problema cruciale di rendere conto logicamente dell'idea di successore immediato di un numero. Non dobbiamo mai perdere di vista il fatto che, secondo questa prospettiva, l'aritmetica come tale c'è già, fatta e finita, esiste ed è sempre esistita, anche se di essa ne abbiamo eventualmente una conoscenza imperfetta e parziale. Ed esisterebbe anche se non ci fosse qualcuno che la pensasse o ne facesse un qualche uso. Persino fin d'ora possiamo dubitare che sia lecito parlare – come accade non tanto in Frege, quanto nei fregeani della prima e dell'ultima ora – dei numeri come entità astratte, cioè come prodotti da un qualche processo di astrazione o di idealizzazione. Al più si tratta di una qualifica che ha senso solo per negazione delle proprietà degli oggetti che possiamo toccare, odorare, mangiare, vedere ecc. A ciò abbiamo già accennato.

– L'eventuale formazione del numero – la sua genesi – non interessa (ciò riguarda l'antipsicologismo di Frege), e secondo i suoi presupposti non vi è proprio nulla da obiettare. Ma questi presupposti dovrebbero comunque essere chiaramente evidenziati. Così come dovrebbe essere messo in rilievo il fatto che la *Zahlangabe* di cui si parla deve necessariamente entrare in una proposizione che non appartiene all'aritmetica, come l'esempio dei satelliti di Venere dimostra. E si sarebbe anche tentati di chiedere che cosa resterebbe della specificazione numerica riferita a concetti, se il mondo non ci fosse, né il pianeta Venere, né qualunque altra *cosa*.

– In ogni caso, il primo impianto del discorso, da un lato presuppone l'aritmetica già costituita, dall'altro l'impiego del numero in campi esterni all'aritmetica e in generale nei suoi usi nel discorso

corrente. Sarei anche tentato di aggiungere che probabilmente nessuno direbbe senza una qualche ragione che “il pianeta Venere ha zero satelliti”, ma userebbe molto semplicemente la proposizione negativa “Il pianeta Venere *non* ha satelliti”. Credo che anche questa circostanza meriti qualche riflessione. Anche per il fatto che Frege, se ho ben compreso, considera la questione nel suo rovescio. Se non avessimo il numero zero, nessuna proposizione negativa sarebbe possibile. Come abbiamo visto or ora, è possibile che nessuna cosa cada sotto un concetto. «Se ciò non avvenisse, non si potrebbe mai negare l'esistenza, e di conseguenza perderebbe il suo contenuto anche l'affermazione dell'esistenza» (1884, p. 62). D'altronde, poco oltre si legge: «Sotto questo riguardo, l'esistenza è simile al numero. L'affermazione dell'esistenza non è altro che la negazione del numero zero» (p. 65). Ma se le cose stessero così, ed io confesso una certa stupefazione, potrebbe sorgere il dubbio: forse è l'aritmetica a fondamento della logica... chissà!

Numeri e astrazione

– Abbiamo detto or ora che l'astrazione in senso tradizionale è ancora presente nell'esposizione di Frege, non già come mezzo per pervenire al numero, ma al concetto a cui si potrà attribuire un numero. Per spiegare l'origine dell'errore di pervenire al numero con un'operazione astrattiva Frege ricorre proprio a questa circostanza ed alla sua precedenza necessaria rispetto alla posizione del numero. «Vediamo ora anche come accade che si voglia ottenere il numero per astrazione dalle cose. Ciò che si ottiene con ciò è il concetto di cui poi si scopre il numero. Cosicché l'astrazione di fatto spesso precede la formazione di un giudizio numerico» (1884, p. 61). Ciò che induce l'errore è il fatto che l'astrazione procura i concetti a cui saranno “applicati”, quando sia il caso, i numeri. Vi sarebbe dunque in certo senso uno scambio tra il prima e il dopo.

– Frege è evidentemente lontano dal pensare che vi possa essere un altro genere di astrazione – un’astrazione “formal-matematica”, potremmo chiamarla così, che ci porti direttamente a quel *etwas überhaupt*, di cui parlava Husserl, attraverso la quale da un qualunque oggetto della sensazione o del pensiero si potesse pervenire all’oggetto matematico-formale per eccellenza, all’idea *generalizzata* di variabile: quest’idea viene invece depressa nel dato di fatto della “grande applicabilità del numero”, e la relazione al concetto diventa la chiave della sua spiegazione. Non vi sono forse concetti per qualunque cosa? «A questo punto si spiega anche la grande applicabilità del numero. Già osservammo quanto fosse difficile comprendere come mai la stessa cosa possa riuscire applicabile tanto a fenomeni esterni quanto a fenomeni interni, tanto a ciò che esiste nello spazio e nel tempo quanto a ciò che è fuori di essi... Solo ai concetti, sotto i quali vengono portati l’esterno e l’interno, lo spaziale e il temporale e ciò che non è né spaziale né temporale vengono applicati i numeri» (pp. 61– 62).

– In questi primi inizi si può già vedere la funzione che assolve all’interno di questa posizione l’oggettivismo platonistico di Frege, che intende i numeri come oggetti di un mondo a sé stante, che non hanno bisogno del mondo (del nostro mondo) per esistere. Non si tratta di un problema aggiunto, che sta per così dire, altrove: al contrario esso rappresenta una sorta di premessa teorica fondamentale. Ogni rapporto con l’esperienza è radicalmente messo da parte, e così anche la parola “astrazione” riferita al numero diventa, all’interno di questo punto di vista, altamente sospetta, per il semplice fatto che l’astrarre sembra essere sempre un “astrarre da...” – e *da* che cosa in primo luogo si può astrarre se non da qualcosa che sta direttamente di fronte a noi – nel nostro mondo? Questa paroletta “da” riporta in primo piano l’esperienza del mondo come punto di partenza, come base da cui comincia il cammino che forse potrà portarci sulle vette di

entità “astratte” – che non si possono né vedere né toccare: come i numeri appunto. Ma questa è appunto, secondo Frege, la via dell’empirismo, per quanto possa essere raffinata, e fa del numero il risultato di un’operazione mentale. Psicologismo! Appunto; ahimè. E soggettivismo distruttivo dell’oggetto “numero”. L’astrazione, secondo Frege, segue questa via e pertanto, in una parola, «*astrarre* è una espressione psicologica, e come tale deve essere evitata nella matematica» (Recensione a Cantor, Frege, 1965, p. 417). Se si parla di numeri come oggettività “astratte” questo aggettivo può solo voler dire: «il numero non può essere né odorato, né assaggiato, né udito, né visto, né toccato» (Frege, 1986, p. 411): cioè esso può attingere un senso solo attraverso queste negazioni.

– Ma, come abbiamo detto, *le cose ritornano*: il concetto a cui inerisce il numero riguardano le cose che *cadono sotto di esso*, secondo la vecchia terminologia, la sua *estensione*: in questo senso il riferimento al concetto, oltre a riportarci sul terreno della logica, *fa da mediazione tra il numero e le molteplicità* (classi, insiemi), *evitando di effettuare un’astrazione dalle molteplicità al numero che d’altronde sarebbe votata al completo insuccesso*. Non solo è subito chiaro che la delimitazione della molteplicità non è determinata dall’esperienza di cose esistenti di fronte a noi: essendo *estensione* di un concetto, la molteplicità in questione è già da subito un’entità appartenente logica. *Tout se tient*.

Equinumerosità e corrispondenza biunivoca

– Naturalmente dire che in una specificazione numerica all’interno di un enunciato il numero spetta al concetto non basta, così come non basta dire, di conseguenza, che ogni estensione ha un numero che la caratterizza. Non basta ai fini di una definizione di un numero determinato, così come non basta per definire il numero in genere. A questo punto la nostra discussione

deve proseguire con nuove nozioni e argomentazioni. Così il numero 12 sarà pertinente al concetto di “apostolo” (purché io sappia che gli apostoli sono dodici); ma ciò significa anche che sarà *vincolato* a quel concetto. E naturalmente dovrei per ogni numero fare riferimento ad un concetto determinato. Questo vincolo renderebbe l'intera questione del tutto priva di senso. Dopo aver deciso che il numero spetta al concetto, è necessario liberarlo da ogni riferimento al suo contenuto. Approdiamo così a quella che una volta veniva chiamata “definizione per astrazione”, che stabilisce una condizione di identità del numero indipendentemente dai concetti considerati. Non vi definirò il numero, ma l'espressione “lo stesso numero” dicendo che un numero x si dice *lo stesso* di y , *qualunque siano i concetti considerati*, se tali concetti sono *equinumerosi*, ovvero se gli oggetti di cui è costituita la loro estensione possono essere messi tra loro in una corrispondenza biunivoca. La logicità di questa caratterizzazione definitoria sta nel fatto che nessun concetto contenutisticamente determinato viene in questione, ed essa si sostiene unicamente sull'idea di “corrispondenza biunivoca”.

– Frege stesso cita a sostegno, l'empirista Hume che aveva fornito questa formulazione: «Quando due numeri sono combinati in modo tale che l'uno ha sempre una unità che corrisponde a ciascuna unità dell'altro, allora li indichiamo come eguali» (per questo è consuetudine odierna dei logici riferirsi a questa formulazione come *principio di Hume*). Beninteso, la posizione complessiva di Hume sull'aritmetica non ha niente a che fare con il logicismo. E sarebbe meglio non confondere troppo le acque. Non solo le parole hanno senso nel contesto di una frase, ma anche una frase di un testo filosofico ha senso nel contesto della filosofia che in esso viene elaborata. Ma a parte questo, la citazione di Hume, che è peraltro una citazione indiretta (tratta da Baumann, il quale la trae a sua volta da un dizionario di terminologia filosofica), sembra ripresa da Frege senza impegno unicamente per l'i-

dea della corrispondenza biunivoca e senza particolare necessità, anzi con rischio di equivoci piuttosto pesanti. Essa presuppone una concezione del numero come aggregato di unità – concezione che è oggetto di una polemica vivacissima da parte di Frege. Poiché il cosiddetto “neologicismo” ha ricreato alcuni crampi mentali intorno al *principio di Hume*, mi sembra che sia opportuno venga tenuta ben presente questa limpida affermazione di Marco Ruffino: «Adottare il Principio di Hume come assioma sarebbe stato efficiente dal punto di vista tecnico, ma sarebbe stato incompatibile con l’interesse di Frege di rendere evidente la natura logica dell’aritmetica... Il riconoscimento dell’aritmetica come una parte della logica dipenderebbe in questo caso dall’accettare ciecamente i numeri come oggetti logici, senza alcuna riduzione a entità a cui ci si riferisce in modo essenziale in una teoria logica come è il caso delle estensioni (o decorsi di valori). Agli occhi di Frege non sarebbe stato assolutamente una strategia convincente, e sarebbe equivalso ad abbandonare il logicismo» (Ruffino, 1905, p. 234). – Il passo di Hume è contenuto nel *Treatise of Human Nature*, I, 3, 1.

– Infatti Frege non adotta il *principio di Hume*. Egli si esprime propriamente così: una volta introdotto il concetto di equinumerosità attraverso la corrispondenza biunivoca, «potremmo dare la seguente definizione: ‘Il numero che spetta al concetto F non è altro che l’estensione del concetto ‘equinumeroso a F’» («*die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes ‘gleichzählig dem Begriffe F’*») (Frege, 1884, 79–80). Basterà sopprimere il riferimento a un qualsivoglia concetto F per poter dire che il numero non è altro che l’estensione del concetto ‘equinumeroso’» (cfr. Frege, 1965, p. 291). Alla base di tutte le complicazioni che si avvertono dai primi inizi, tuttavia vi sono poche nozioni realmente decisive per avviare l’intero corso di idee – il legame tra oggetti e concetti, dunque la nozione di estensione, il numero che in certo senso *si nasconde* dietro l’equinumerosità,

l'equinumerosità che si risolve in una corrispondenza biunivoca – beninteso puramente pensata.

– Vi sono insiemi di *cose* che eventualmente hanno lo stesso numero, ma che *non possono* essere messe in corrispondenza biunivoca – magari non lo possono per banali ragioni empiriche. F. Waismann fornisce vari esempi di questa impossibilità empirica e conclude, su questo punto, che «un tale coordinamento ci sia di fatto ce lo può dire solo l'esperienza». (1971, p. 127 sgg.) Altri esempi proposti di Waismann mostrano difficoltà dipendenti dal fatto che, sempre considerando casi empirici, ad es. la visione di un cielo stellato, potrebbe accadere che non si possa decidere nemmeno se la quantità di stelle viste sia in numero determinato venendo così meno una sorta una sorta di precondizione per stabilire l'equinumerosità. Egli dice: secondo la definizione di Frege «per una legge logica assoluta, due insiemi debbono sempre essere o non essere egualmente numerosi sia che noi possiamo, sia invece che non possiamo verificarlo... Ma così non è: il senso di un'affermazione proviene soltanto dal modo di verificarla... bisogna badare ai procedimenti che servono a stabilire tale uguaglianza di numero» (p. 133). Queste obiezioni non colgono nel segno proprio per il fatto che Frege è completamente disinteressato all'applicazione della corrispondenza biunivoca come procedura effettivamente realizzabile e, io credo, all'applicazione dell'aritmetica in genere; quanto meno non è interessato *all'impiego concreto dei numeri per stabilire la quantità di oggetti*, nonostante il fatto che gli esempi ordinari di Frege facciano riferimento ad essa. Credo invece che si possa dire che, nonostante le iterate dichiarazioni secondo cui il numero deve rispondere alla domanda “quanti?”, secondo la definizione di Frege, comunque rigirata, perfezionata e messa *nella misura del possibile* al riparo da difficoltà di natura logica (nelle quali, come si sa, cadrà comunque clamorosamente), il numero non fornisce mai una indicazione numerica di quantità. Esattamente come il proverbiale pastore che “conta”

le sue pecore con i sassolini che tiene in tasca.

– La nozione di corrispondenza biunivoca non ha a che vedere con nessuna operazione concreta, anche se di essa si possono dare a scopo esplicativo grossolani esempi con le cose di tutti i giorni. Apparecchiando il tavolo, metti un coltello alla destra di ogni piatto e sarai certo che piatti e coltelli saranno in corrispondenza biunivoca. E potrai anche partire dallo stesso esempio per introdurre la nozione di relazione come nozione logica (§ 70, p. 81). Tutte le nozioni di base appartengono al cielo del pensiero puro – e se non ti immergi in questa purezza non potrai comprendere nulla del “logicismo”. Anche se poi le impurità della realtà zampillano da ogni parte.

Numero e relazione

– Frege è peraltro attentissimo a queste impurità. E in particolare tenta di riformulare il concetto di *corrispondenza biunivoca* in modo da liberarlo da qualunque riferimento ad un’operazione mentale o ad un’operazione reale. Parlare di corrispondenza biunivoca sembra sottintendere una qualche particolare operazione che sappia stabilire la correlazione uno ad uno in entrambe le direzioni e che potrebbe essere diversa secondo gli insiemi considerati. Si richiede perciò una logicizzazione ulteriore, ovvero una completa riformulazione della nozione, cosa che Frege realizza riconducendola alla nozione logica di relazione. Ciò avviene all’inizio del § 71 delle *Grundlagen* dove si legge la seguente formulazione: «Se ogni oggetto che cade sotto il concetto F, si trova nella relazione φ con un altro oggetto che cade sotto il concetto G, e se per ogni oggetto che cade sotto G, si trova un oggetto che sta nella relazione φ con un oggetto che cade sotto F, allora gli oggetti che cadono sotto F e sotto G sono coordinati l’uno all’altro secondo la relazione φ » (1884, p. 83).

– Qui compare una relazione non determinata φ che connette biunivocamente tutti gli oggetti che cadono sotto F e tutti gli oggetti che cadono sotto G. La corrispondenza biunivoca in quanto fondamento dell'equinumerosità è scomparsa da questa definizione mentre resta l'idea di una relazione che sussiste tra ogni elemento di F e G nelle due direzioni. Che in questo modo la corrispondenza biunivoca venga ricondotta a rapporti puramente logici viene sottolineato da Frege: «Con ciò abbiamo ricondotto il coordinamento biunivoco a puri rapporti logici e possiamo dunque definire che l'espressione 'il concetto F è equinumeroso con il concetto G' ha lo stesso significato dell'espressione 'vi è una relazione che coordina biunivocamente gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G'» (p. 85).

Definizione per astrazione?

– Resta ancora qualcosa da dire sulla “definizione per astrazione” e sul numero come spettante ad un concetto, dopo che si è giunta alla sua formulazione logica definitiva. Ciò che resta da dire, e che affiora anche in precedenza in queste note, ha a che vedere con il titolo che abbiamo voluto dare a questa sezione delle nostre osservazioni: l'aritmetica senza l'astrazione. Questo titolo è suggerito dalle tematiche sviluppate da Ignacio Angelelli, che si è occupato in diversi saggi della tematica dell'astrazione nei quali si trova la negazione più netta ed esplicita che nella posizione fregeana ed in coloro che la hanno ripresa abbia luogo qualcosa di simile ad una procedura astrattiva.

– Anzitutto egli ha fatto notare che l'espressione *definizione per astrazione* non solo non è di Frege, ma egli la usa occasionalmente *solo una volta* in una lettera a Russell. In realtà, si tratta di un'espressione coniata da Peano, in una formulazione che non esclude l'astrazione nel senso tradizionale dell'“astrarre da” che Frege

vorrebbe bandita dalla matematica. In ogni caso, la “definizione per astrazione” è stata spesso conclamata dai logici di tendenza logicista come la quintessenza del definire, come scoperta o, meglio riscoperta – dati i precedenti di Euclide e di Leibniz – dell’introduzione di una nozione di definizione nella forma più consona al pensiero “puro”. Ed anche in tempi recenti e recentissimi, mentre l’espressione “definizione per astrazione” sembra caduta in disuso, nel tentativo “neologicistico” parole come astratto, principio di astrazione, e simili si ritrovano ad ogni piè sospinto – ma si tratta sempre di nozioni che hanno a che vedere, in modi spesso molto sofisticati, con riformulazioni della corrispondenza biunivoca. – Su questo tentativo di risuscitare l’istanza fregeana dei fondamenti logici dell’aritmetica, inaugurato da Crispin Wright (1983), puoi vedere i pro e i contra nel volume curato da Andrea Pedferri (2005).

– Ma se ci chiediamo dove sia l’astrazione in un qualche senso del termine nella proposta definitoria di numero da parte di Frege, credo che avremmo qualche difficoltà a dare una risposta chiara. I numeri (e in generale l’aritmetica) sono presupposti – ed anzi nella forma più forte; essi sono esistenze eterne indipendenti dal mondo e fanno parte di un mondo a sé stante. Frege non disponeva dell’idea di un’oggettività “intenzionale” e quindi dei numeri “intesi” come oggetti, così come non avrebbe potuto ammettere alcuna genesi fenomenologica del numero che fosse compatibile con l’oggettività interpretata come un modo dell’intendere. L’oggettività del numero non può essere concepita da Frege altrimenti che *come appartenenza ad un mondo totalmente altro*. Definire il numero sulla base dell’equinumerosità del concetto (o meglio: della sua estensione) e questa sulla nozione di “corrispondenza biunivoca” non sembra contenere una qualche operazione del pensiero che meriti di essere chiamata “astrazione”: si tratta al più di una modalità del definire, non di una modalità dell’astrarre.

Il metodo definitorio di Frege non ha a che vedere con l'astrazione

–Per rendere pregnante la propria presa di posizione, Angelelli dà al metodo definitorio di Frege il nome di «metodo del guardarsi intorno» (*looking around for*) sopprimendo così qualunque riferimento che richiami il verbo “astrarre”. Questa espressione è tratta da *Meaning and Necessity* di Carnap (1947, p. 1), in un contesto che rimanda alla definizione fregeana. Osservo di passaggio che purtroppo nella traduzione italiana del testo tutta la questione viene semplicemente cancellata perché la frase «Then we *look around for* entities which might be taken as extensions or as intensions for the various kinds of designators» viene tradotta con «*Esamineremo* ciò che può essere considerato estensione o intensione per i vari designatori»: cosa che mostra come si possa affossare un problema attraverso una traduzione a piacere (Carnap, 1976, p. 9).

– Angelelli rammenta in breve la procedura in questione nei termini seguenti: «Si supponga vi siano espressioni che si desidera chiarire e definire più precisamente. Ad esempio, ‘il numero di un concetto F’, ‘l’estensione di un concetto F’, ecc. In stile cartesiano, per amor del metodo, abbiamo deciso di dimenticare qualsiasi senso abbiamo già dato a queste espressioni.... Invece di preoccuparsi del loro significato, ci preoccupiamo di stabilire condizioni di identità, *come primo passo*. Ad esempio, anche se non abbiamo la minima idea di quello che significa ‘il numero del concetto di F’, stipuliamo che, qualunque sia quel significato, il numero del concetto F = il numero del concetto G se e solo se F e G si trovano in una relazione tale che gli oggetti che cadono sotto di essi possono entrare in una corrispondenza biunivoca. Questo rapporto deve essere una relazione simmetrica e transitiva, o come anche si dice, una relazione di equivalenza. Inoltre, come la *seconda ed ultima fase del metodo*, si procede a ‘guardarsi

intorno', consiglia Carnap, al fine di trovare candidati adeguati ad essere assegnati al significato, o denotazione, dei nostri termini singolari, 'il concetto di F', ecc., intendendo con candidato adeguato qualsiasi oggetto tale da essere compatibile con la condizione di identità indicata nella prima parte. Una cosa che può essere scelta, e che è stata ampiamente scelta è chiamata classe di equivalenza. Questo è il metodo utilizzato da Frege in due punti cruciali della sua teoria: la definizione di numero, e nella definizione del decorso di valori (*Wertverlauf*)» (1991, p. 171).

– Angelelli fa una critica durissima del metodo che egli chiama del *Looking around*. «È un metodo futile e incompatibile con un atteggiamento filosofico serio (*Es un método frívolo e incompatible con una seria actitud filosófica*). La spiegazione di come un metodo che non ha nulla che concerna l'astrazione possa essere chiamato 'definizione per astrazione' e che viene di conseguenza considerato perciò come astrazione deve essere ricercata nelle vicissitudini e confusione verificata nella trasmissione di questa espressione di Peano (che egli ha coniato con motivazioni genuine) ad altri logici italiani ed a Russell» (ivi, p. 172).

– Egli accenna anche, nonostante le critiche all'uso del termine di astrazione in Husserl rammentate in precedenza, alle buone ragioni che si trovano nella *Filosofia dell'aritmetica* contro quel metodo definitorio (1984, p. 466). Husserl scriveva allora, e Angelelli cita questo passo: «Non riesco a comprendere come questo metodo significhi un arricchimento della logica. I suoi risultati sono tali che noi possiamo solo meravigliarci come qualcuno abbia potuto anche solo provvisoriamente ritenerli veri» (Husserl, 1970, p. 122). Questo riconoscimento di Angelelli fa parte della rimessa in gioco della filosofia della matematica di Husserl, e di quell'opera giovanile in particolare, che è stata operata in anni relativamente recenti.

Una conferma tratta da Russell

– Anche Russell, dopo qualche esitazione, dopo aver parlato di *principle of abstraction*, finisce poi con il dire che un simile metodo *ci consente di fare a meno dell'astrazione*. «Nei *Principles of Mathematics* Russell respinge totalmente le 'definizioni per astrazione' di Peano come prive di validità... nei *Principia Mathematica* l'espressione *principle of abstraction* è usato per qualcosa che è di nuovo, fondamentalmente, il metodo del 'guardarsi intorno' di Frege, che non implica alcuna astrazione. In realtà, molto ragionevolmente ad un certo punto Russell suggerisce di dire 'il principio che ci libera dall'astrazione' (*the principles that dispenses with abstraction*) invece di 'principio di astrazione'» (Angelelli, 1984, p. 464) (La frase citata si trova in Russell, 1966, p. 52)

VIII

Esperimento psicologico e fisica ingenua in Paolo Bozzi

– Nella storia che Paolo Bozzi narra nel suo straordinario libro *Fisica ingenua* (Bozzi, 1990), in cui l'elemento autobiografico si intreccia in maniera sorprendente con il dibattito scientifico teorico, il tema dell'*esperimento* e dell'attività dello *sperimentare* si presenta come una sorta di filo conduttore interno che io vorrei seguire almeno per qualche breve tratto. In proposito non intendo riferirmi soltanto ai numerosi esperimenti che vengono descritti e discussi con grande chiarezza e che danno corpo alla tematica centrale del libro, ma anche a tutte quelle annotazioni disseminate nel testo che, da diversi punti di vista, danno la massima pregnanza e vivezza all'idea stessa dello sperimentare.

– L'esperimento, che può apparire come una sorta di marchingegno interno ad un marchingegno più ampio, un apparato dentro

il più ampio apparato della scienza, si presenta invece in primo luogo e in generale come un vero e proprio modo di stabilire un contatto con la realtà, un modo di saggiarla, di metterla alla prova, anche quando sperimentare significa soltanto e semplicemente *osservare, guardare*.

– Paolo Bozzi riesce a trasmetterci in pochi tratti la natura complessa di questo sguardo, come quando parla dell’occhio «che non si stanca di seguire la sconcertante traccia di un movimento stroboscopico nel buio tra i due estremi della sua traiettoria rettilinea e intanto il pensiero legato ad esso giocherella futilmente con la domanda ‘Cosa diavolo potrei fare per incurvare quella traiettoria?’»; uno sguardo dunque che è tutto meno che una pura ricezione passiva del reale, ma che contiene riflessioni fulminee, domande e pensieri: uno sguardo che fruga il reale come quello del botanico, che in questo testo è una figura del ricordo che tende ad assumere una sorta di profonda esemplarità. Ma questo sguardo è anche la «materializzazione di una curiosità ammirata» nella quale è presente la «gioia immediata di vedere e di comprendere», di cui parla Einstein facendo riferimento a Mach (cfr. p. 158).

– Nello sperimentare c’è invenzione e immaginazione, c’è il progettare e il costruire, c’è meraviglia e passione; c’è soprattutto la tensione osservativa attraverso la quale dobbiamo talvolta accorgerci di ciò che abbiamo sempre veduto e di cui non ci siamo mai accorti; in esso non ci sono scopi, o meglio non ci sono utilità immediate e immediatamente a portata di mano – un tema questo che affiora più di una volta in contrapposizione a quell’altra tensione, di tutt’altro genere «che si guarda intorno con attenzione per scovare tra le pieghe dell’attualità contingente qualche opportunità gratificante o qualche leva per agire sulle cose o sugli altri» (ivi).

– Inteso in questo modo lo sperimentare può avere origini lontane ed apparentemente anche al di fuori della scienza e dei suoi compiti. Per ricercare le sue radici possiamo addirittura risalire al gioco infantile, o più precisamente a quei giochi in cui si mettono alla prova gli stessi nessi del reale in una sorta di libera variazione operata sul reale stesso, in cui si vuol vedere *che cosa accade se invece di questo nesso ci fosse quest'altro*. Ma non è solo il gioco che può essere chiamato in causa. Anche il pittore, ad esempio, quando si accinge a riempire la sua tela, mette qualcosa *alla prova*, fosse anche soltanto questo o quell'accostamento cromatico; e così il musicista nel suo comporre con i suoni si pone il problema di *che cosa accade quando...* quando quei determinati suoni risuonano in una successione oppure simultaneamente, quando sono distribuiti secondo certi intervalli temporali, piuttosto che secondo altri.

– Sia per la nozione di *fisica ingenua* che per quella di *fenomenologia sperimentale* il filosofo si sente chiamato in causa, ed io credo per buone ragioni; così come viene messo in questione l'intero problema del *rapporto tra filosofia e psicologia*, e più determinatamente tra *filosofia fenomenologica* e *psicologia fenomenologica*, ovvero, come si potrebbe anche dire, tra fenomenologia pura e fenomenologia empirica.

– In Paolo Bozzi vi è ovunque una grande consapevolezza di queste implicazioni filosofiche, ed essa appare in primo piano laddove ci parla di Hume o di Cartesio, e soprattutto di Aristotele e di Galileo, con una vivacità, una chiarezza ed una penetrazione che ci fa comprendere di più di molti commenti specialistici.

– Già il titolo del libro dà il destro ad una discussione: *Fisica ingenua*. In rapporto ad esso vorrei proporre qualche elemento di perplessità confortato del resto dall'impressione che l'autore stesso lo accetti in certo senso in forza di una consuetudine or-

mai consolidata che forse non vale la pena di mettere in questione. Vi è qualcosa in questo titolo di non aderente alla natura del problema, qualcosa di riduttivo e forse persino di profondamente equivoco. L'operazione essenziale compiuta da Bozzi non è infatti quella di mostrare la presenza di opinioni più o meno *false* nella nostra conoscenza quotidiana delle leggi della meccanica, e tanto meno quella di riconoscere la presenza di pretese sopravvivenze di una cultura anteriore: l'operazione importante e significativa è invece quella di ricondurre queste "opinioni" (che peraltro si possono chiamare così solo impropriamente) a regolarità direttamente colte sul piano percettivo e precisamente sul piano visivo.

– In altri termini, vi sono concezioni sulla caduta dei gravi, sul movimento pendolare, sulla traiettoria dei proiettili che dipendono strettamente da condizioni che sono in realtà necessarie affinché un determinato *risultato percettivo* abbia luogo.

– In certo senso l'idea di una fisica ingenua – cioè l'idea di un *corpus*, anche se non organico, di concezioni effettive e di opinioni vere e proprie – è un'idea secondaria, nel senso che queste concezioni ed opinioni possono essere considerate come una sorta di eco, di riflesso di situazioni visive concrete: è possibile addirittura assumere che le risposte fornite dagli osservatori, ad esempio, sulla traiettoria della caduta dei gravi, siano realizzate semplicemente attraverso la visualizzazione della situazione percettiva corrispondente.

– Questo modo di porre il problema ha un grande rilievo non solo dal punto di vista percettologico, ma anche dal punto di vista della problematica epistemologica ed in particolare dei rapporti tra scienza ed esperienza. Fino a pochi anni fa questi rapporti sembravano liquidati da ovvietà sul sapere prescientifico come luogo di opinioni prive di fondamento, di conoscenze

cosiddette intuitive intese come rozze approssimazioni legate ad una nozione di buon senso peraltro mai chiarita, così come era moneta corrente l'idea che la “concezione del mondo” – il nostro modo di vedere il mondo, nel senso letterale ed elementare del termine – sarebbe pronto a modificarsi ad ogni mutamento dei quadri categoriali di conoscenza della realtà.

– La novità nella posizione del problema non sta per nulla nell'idea di un'*altra fisica* – quindi di un'altra “teoria”, anche intendendo questo termine nella sua forma più debole – ma sta nella scoperta di alcuni interessanti problemi di fenomenologia della percezione. La ragione per cui mi sembra che il titolo di fisica ingenua possa essere equivoco sta nel fatto che fa pensare invece ad una sorta di *fisica parallela*. Invece, se si riconsidera secondo l'angolatura proposta dall'autore, ad esempio, la problematica aristotelica del movimento, la tesi che emerge da questa discussione è soprattutto quella di una particolare prossimità di quella problematica alla dimensione dell'*esperienza del movimento*.

– Considerando le cose da questo punto di vista, assumono subito rilievo due grandi problemi che la dizione di *fisica ingenua* tende a mettere in ombra: da un lato il problema di un mondo dell'esperienza che ha le sue forme e i suoi nessi strutturali, quel mondo costruito su quelle percezioni che sono, dice Bozzi, “l'unica realtà tangibile che inequivocabilmente ci sia data” (p. 153) – un mondo all'interno del quale si forma, secondo regole in realtà sufficientemente determinate, un intero complesso di *concettualizzazioni primarie* o, se vogliamo, di *prime concettualizzazioni*; dall'altro il problema dello sviluppo che conduce da queste concettualizzazioni primarie a concettualizzazioni di grado superiore, e necessariamente di nuovi metodi di formazione dei concetti che tendono a prendere sempre più le distanze dall'immediatezza dell'esperienza e infine a tagliare il nodo con essa.

– A me sembra che si debba dare la massima evidenza all'ampiezza dello spazio teorico che fa da sfondo a questo problema della “fisica ingenua”. In realtà le osservazioni precedenti non sono obiezioni dal momento che risulta chiaro dalla introduzione della nozione di *Qualità terziaria*, introdotta nel capitolo terzo del volume, che il tema della percezione del movimento non è ritagliato all'interno di una sorta di duplicazione ingenua della fisica o della scienza della natura in genere, come se, oltre ed accanto ad una meccanica ingenua ci dovessimo aspettare lo sviluppo di un'ottica ingenua, di una chimica ingenua o di un'astronomia ingenua come possibili discipline psicologiche – ma si trova invece all'interno del tema generale dell'espressività dei dati esperiti. Detto in breve, ciò che Bozzi sostiene è non solo che possiamo parlare fondatamente di una maggiore o minore naturalezza di un moto pendolare, espressione che non ha alcun senso dal punto di vista fisico, ma anche che la maggiore o minore naturalezza di un moto pendolare è da annoverare tra i tratti espressivi – come quelli che possiamo cogliere nel volto di una persona o nel gesto di una mano.

– Proprio la consapevolezza che lo sfondo sia questo mostra la necessità di un raccordo con la fenomenologia filosofica. Dal mio punto di vista, cioè dal punto di vista di uno strutturalismo fenomenologico specificamente rivolto all'elaborazione di una filosofia dell'esperienza, questo raccordo, nel mantenimento di una precisa delimitazione reciproca, è del tutto a portata di mano. Ho l'impressione invece che per Bozzi esso non appaia troppo auspicabile – forse per via di un brutto incontro con una fenomenologia della percezione “troppo filosofica” com'è quella di Merleau-Ponty, o più in generale per il fatto che proprio alcune tematiche fenomenologiche come quella del “mondo della vita”, che potrebbero in realtà a buon diritto essere richiamate a proposito delle ricerche di Bozzi, sono state spesso sommerse da quelle “ciacole” da cui gli psicologi della percezione soprattutto

si guardano e da cui in realtà farebbero bene a guardarsi anche i filosofi. D'altra parte l'enfasi sull'esperimento contro le ciacole dei filosofi spesso non fa buona prova, e può essere che l'accento sulla "sperimentalità" della sua fenomenologia non risparmi a Bozzi la critica di essere troppo propenso a filosofeggiare.

– Comunque ne sia, mi sembra di notare una certa circospezione da parte di Bozzi ad estendere il problema in questa direzione, un certo sospetto nei confronti di chi parla tanto di una visione libera da pregiudizi, di messa in parentesi, di epoché ecc., senza essersi mai posto il problema di una visione effettiva all'interno di una situazione sperimentale sufficientemente determinata. Vorrei sottolineare molto vivacemente che il fatto che questo sospetto è più o meno giustificato secondo i casi, secondo i problemi, secondo ciò che vogliamo esattamente sapere.

– Ci sono domande che non possono trovare una risposta se non attraverso la progettazione di una situazione sperimentale. *Ma ve ne sono altre a cui occorre invece aver dato preventivamente una risposta per la stessa impostazione e progettazione di una situazione sperimentale.*

– Per illustrare in due parole la questione, vorrei rammentare il caso esemplare del rapporto tra la celebre argomentazione di Hume sulla causalità e gli esperimenti descritti da Michotte nel suo volume sulla percezione della causalità. In realtà Hume non è mai stato confutato dagli *esperimenti* di Michotte: e questo per il semplice fatto che egli era già stato confutato dall'affermazione di Michotte proposta nell'introduzione al volume, là dove si dice che noi vediamo "il coltello che taglia il pane", e non un certo movimento del coltello e della mano ed una fessura che si apre *in concomitanza* con quel movimento. Questa affermazione appartiene alla "fenomenologia pura" – oppure, detto in altro modo: essa non poggia su esperimenti, ma su una riflessione intorno alla "grammatica filosofica" del verbo *tagliare*. Ed in proposi-

to vanno rammentate le illuminanti osservazioni di Paolo Bozzi sul rapporto tra linguaggio ed esperienza, sintetizzate nella frase secondo cui il linguaggio comune “è il linguaggio tecnico dell’esperienza percettiva” (p. 177 e p. 301): formulazione bellissima che meriterebbe un commento dettagliato, ma che forse non ne ha affatto bisogno.

– A proposito della sperimentazione Paolo Bozzi ha una propria concezione in particolare nel campo del campo dei fenomeni di movimento e in generale in quello delle “apparenze” fenomenologiche – una concezione che nel volume viene lasciata trasparire più che essere apertamente teorizzata. Gli esperimenti di Bozzi hanno alcune speciali caratteristiche, alcune singolari peculiarità. E talvolta essi non sembrano attenersi strettamente alle regole canoniche o ritenute tali; ed egli si rifiuta – con pesante ironia, di fare cose che altri riterrebbero obbligatorie. Ad esempio, Bozzi si rifiuta di interrogare i Watussi... (p. 301), e non è poco!

– «Ma il mio obiettore grida sempre allo scandalo. Un professore di storia dell’arte, a proposito dell’esperimento con i pendoli, mi incitava a ripetere le mie misure coi watussi, i pigmei e i cinesi, onde stabilire qualcosa di buono sui rapporti tra meccanica e percezione. Quanto al linguaggio, per seminare dubbi metodologici, vengono sempre chiamati in causa gli indiani Hopi, che notoriamente vedono il nostro comune mondo di cose e di fatti in modo diverso, poiché parlano – sembra – una lingua particolarmente ostica. Tutte discussioni da lasciar perdere» (p. 302).

– Inoltre, Bozzi, che ha costruito l’esperimento e che sa tutto sui congegni che lo reggono, e che persino ha delle precise attese teoriche sui risultati dell’esperimento (o addirittura delle speranze), non esiterebbe a sedersi bellamente tra gli osservatori ed a partecipare all’esperimento come soggetto sperimentale

– “Dubito fortemente – egli dice una volta – di tutti gli esperimenti cui io stesso non abbia assistito” (p. 346). Ed un'altra sua frase, merita in proposito di essere citata: “Un esperimento deve essere una *Gestalt*, non una raccolta di dati” (p. 311). Si tratta di una frase molto impegnativa, ricca di senso e di conseguenze e mi piacerebbe che, prima o poi, fosse resa interamente esplicita in tutti i suoi importanti sottintesi: essa pone un problema per nulla estraneo alle questioni che ho cercato di sollevare.

IX

È giusto parlare di “intelligenza artificiale”?

– Vi sono due modi piuttosto diversi di impiegare questa espressione. Si può parlare di *intelligenza artificiale* usando questa espressione tra virgolette (o sottintendendole) oppure senza virgolette o addirittura con una virgoletta sola, come se cominciassimo con l'aprire le virgolette e ci dimenticassimo poi di chiuderle. È evidente che usare le virgolette, prima aperte e poi accuratamente chiuse, significa impiegare questo termine con un alto grado di convenzionalità, come una sorta di designazione per indicare una determinata fase nello sviluppo dei linguaggi di programmazione ed un ambito problematico ben definito.

– Il senso di *intelligenza artificiale* non sarebbe allora determinato dal riferimento all'intelligenza umana, e tanto meno dalla contrapposizione – di per sé assai singolare – tra una intelligenza “naturale” ed una “artificiale”, ma piuttosto dai problemi, in realtà abbastanza esattamente determinati o esattamente determinabili, che si pone in concreto il ricercatore in rapporto ai linguaggi di programmazione orientati in questa direzione così come, naturalmente il progettista e lo studioso di elettronica per la parte fisica del problema.

– Proprio questo voglio sostenere: potremmo rinunciare com-

pletamente al riferimento all'intelligenza ed all'artificio senza rimetterci nulla per ciò che riguarda la realtà del problema – ma anche del suo interesse filosofico, anzi dei molteplici interessi filosofici che le problematiche speciali che vengono riunite sotto quel titolo rivestono.

– Voglio riprendere a questo proposito un'informazione che traggo dal gustoso saggio di Odifreddi, *Il teorema di Gödel e l'Intelligenza artificiale*.

«Nel 1936 il matematico inglese Alan Turing sviluppò le basi teoriche dell'informatica, introducendo in particolare un modello astratto di macchina calcolatrice programmabile, oggi chiamata appunto *macchina di Turing*. Egli prese spunto da un'analisi del processo mentale di calcolo e, benché il suo lavoro fosse puramente matematico, Turing usò a più riprese una terminologia antropomorfa, parlando in particolare di 'stati mentali' per riferirsi a configurazioni interne della macchina. Pochi anni più tardi egli incominciò ad accarezzare il sogno di costruire fisicamente una tale macchina, e continuò ad usare l'analogia originaria, parlando del suo progetto come della costruzione di un 'cervello'. Tali espressioni non erano altro che analogie stimolanti ma superficiali, e così erano viste da coloro che conoscevano Turing. Ad esempio Max Newmann, che fu relatore della sua tesi di laurea ed ebbe un ruolo di rilievo nella costruzione dei primi calcolatori inglesi, nel necrologio di Turing dice che egli 'aveva un talento per analogie comiche ma brillanti, che dispiegò nelle discussioni su cervelli e macchine'. In seguito l'ironia di Turing andò perduta e, quando i computers divennero disponibili, l'analogia fra essi ed il cervello incominciò ad essere presa seriamente» (Odifreddi, 1992).

– Una corretta discussione intorno agli interessi filosofici che gravitano intorno all'intelligenza artificiale dovrebbero prendere

le mosse proprio dal riconoscimento della completa inessentialità di quella designazione. E tuttavia essa è stata inventata, ed è stata in certo senso popolarizzata: non è forse questa mia considerazione iniziale troppo riduttiva?

– Veniamo all’impiego dell’espressione *intelligenza artificiale* senza virgolette o addirittura con una virgoletta sola. L’espressione impiegata senza virgolette lascia vivere ed agire proprio il riferimento all’intelligenza umana ed alla sua ricostruzione o imitazione artificiale, lascia vivere il suggerimento o la suggestione di una tecnologia che sta ormai per impadronirsi di alcune scintille dell’attività della ragione. Mi permetto di ascrivere (non so se a torto o a ragione) l’uso dell’espressione *intelligenza artificiale* con una virgoletta sola prevalentemente proprio agli addetti ai lavori, che in realtà vorrebbero evitare la virgolettatura, ma che sanno molto meglio di quanto sappia io che la realtà del problema non sta nello svampimento filosofico di quella espressione, ma nella concretezza delle problematiche teoriche e pratiche che vanno affrontando di volta in volta, e che quindi sono subito pronti a chiudere in un momento qualunque le virgolette che hanno lasciato ambiguamente aperte.

– Considerando le cose da questo lato, si colgono svariate implicazioni che hanno a che vedere con un orientamento intellettuale complessivo che solo in parte ha a vedere con la portata teorica e conoscitiva autentica del problema. Io credo che non si debba temere di segnalare, almeno come una questione su cui avviare una riflessione più approfondita, la presenza, proprio nel cuore di quello che è senza alcun dubbio una delle punte più avanzate dello sviluppo teorico, scientifico e tecnico del secolo XX, di aspetti singolarmente regressivi, sia per ciò che riguarda gli sfondi ideologici, sia per ciò che riguarda l’atteggiamento intellettuale.

– Dietro l'espressione di *intelligenza artificiale* a me sembra che si riaffaccino o possano riaffacciarsi concezioni filosofiche sostanzialmente superate. Ad esempio, essa sembra quasi implicare in modo intrinseco, una posizione di tipo comportamentistico che bada ai risultati che si manifestano esteriormente, piuttosto che ai processi mentali che stanno alla loro base. Ciò che importa qui è infatti il comportamento manifesto della macchina, il modo in cui essa “si comporta” e l'interpretabilità di questo comportamento e del suo risultato *come se avesse alla base un processo mentale definibile come intelligente*, mentre si prescinde interamente dall'esistenza effettiva di un simile processo. Per quanto si tratti di un modo non privo di interesse in quanto pone il problema di un confronto tra ciò che contraddistingue un'operazione intelligente da una operazione che *appare* tale, si tratterebbe in ogni caso di evitare il rischio di una ripresa acritica di una concezione comportamentistica nelle sue forme più vecchie e logore.

– È anche innegabile la possibilità che tematiche materialistiche troppo elementari riprendano fiato: l'immagine della macchina capace di pensare e di comprendere rilancia l'*homme machine*. Si fa avanti così un riduzionismo di tipo materialistico che prende le mosse da un'istanza di formalizzazione completa dei processi mentali per approdare ad un'ipotesi di riduzione dei meccanismi formali a meccanismi fisico-materiali.

– Io non credo che queste possibili implicazioni filosofiche siano realmente obbligatorie. Tuttavia mi sembra di notarne la presenza, talvolta scoperta, talvolta implicita e serpeggiante nei dibattiti. E se le cose stessero proprio così, se questi orientamenti intellettuali fossero veramente ritenuti come una sorta di supporto filosofico necessario, io tenderei a ribadire che *l'informatica non ha ancora l'epistemologia che si merita*.

– La presenza di un aspetto regressivo lo si avverte poi in maniera particolarmente evidente in due aspetti che affiorano di

continuo: accade raramente di udire un intervento di carattere generale sull'intelligenza artificiale e sulla robotica che, nonostante tutta la prudenza scientifica, non abbia almeno una sfumatura che tradisce la presenza di una fantasia di onnipotenza. Del resto credo che l'espressione stessa di *intelligenza artificiale* non sarebbe mai stata coniata senza che sullo sfondo vi fosse una simile fantasia. Ed è notorio che le fantasie di onnipotenza sono fantasie caratteristicamente infantili.

– L'altro aspetto assai singolare e fortemente contraddittorio riguarda la tendenza all'impiego di un linguaggio fortemente antropomorfo che non è affatto una caratteristica solo dei testi divulgativi. Questa tendenza si è cominciata ad affermare già nelle prime fasi della storia del calcolatore, ma raggiunge in realtà la sua massima espansione nel caso della robotica, come sembra ovvio. A mio avviso non si tratta per nulla di una tendenza giustificata da una sorta di passaggio qualitativo, di mutamento di natura della macchina: ma si tratta di una paradossale riviviscenza di animismo preistorico che si presenta, del tutto inatteso, nel punto più alto della tecnologia novecentesca.

– Il linguaggio impiegato nel rapporto tra l'operatore e il calcolatore o nella descrizione del rapporto tra il calcolatore e il mondo esterno è normalmente di tipo animistico. Noi parliamo alla macchina ed essa ci ascolta, talvolta risponde ai nostri interrogativi, ad essa possiamo impartire degli ordini che essa poi esegue in vari modi. Naturalmente a tutto ciò si aggiunge la clausola dell'artificio: come vi è una mano artificiale, così può esservi una vista artificiale o un odorato artificiale – la macchina vede e annusa. L'intelligenza artificiale diventa la metafora che corona tutte queste metafore, una sorta di integrazione necessaria.

– Il problema che sto toccando dovrebbe certo essere considerato più a fondo: la tendenza ad una modalità di discorso an-

tropomorfo è ovunque presente nell'ambito della tecnologia ed ha molte giustificazioni dalla propria parte. Questa tendenza non riguarda solo l'elettronica o il calcolatore. Ad esempio, parliamo della *sensibilità* di una *pellicola fotografica*. Questa parola ha una ovvia origine analogica. Ma vorrei quasi dire che la gente è stata fin dall'inizio educata ad escludere o a mettere da parte questa valenza antropomorfa e a orientarsi invece sui processi fisici corrispondenti: cosicché a nessuno verrebbe in mente di parlare di *sensibilità artificiale della pellicola* o della macchina fotografica come una macchina che ha un *occhio artificiale*, o che *vede artificialmente*. L'aspetto singolare è che vi è invece, nel nostro caso, una tendenza ad educare la gente nella direzione opposta: benché si sappia benissimo che, nonostante la complessità maggiore, gli organi sensori di un robot, la sua *sensibilità* non differisce nell'essenziale da quella di una pellicola fotografica.

– L'espressione *intelligenza artificiale* va strettamente virgolettata, anche se ciò equivallesse alla caduta di discorsi interessanti solo in apparenza, ma privi di reale contenuto. A me sembra che la filosofia avrebbe materiale particolarmente ricco e interessante con cui misurarsi considerando più da vicino le problematiche particolari che vengono direttamente o indirettamente suggerite da questo genere di ricerche.

– L'espressione di *intelligenza artificiale* impiegata senza virgolette allude invece per lo più ad una sorta di *utopia moderna*, che sta sullo sfondo di ricerche che non sono per nulla utopiche, ma anzi molto determinate, molto concrete. Parlando di *utopia* non voglio affatto affermare che si debba ritenere impossibile, per qualche misteriosa ragione, la riproduzione tecnica di procedure che si possano chiamare "intelligenti". Fornendo una definizione opportuna di procedura intelligente la questione di questa possibilità potrebbe essere anzi considerata già positivamente risolta. Non dobbiamo infatti dimenticare che quando si parla di

intelligenza artificiale non si fa affatto solo un discorso al futuro, ma ci si richiama a prodotti già pronti ed a nostra disposizione. Anche tenendo conto di ciò non vedo per quali ragioni si debba mantenere quel riferimento utopico che poteva forse essere giustificato come elemento propulsore negli stadi più arretrati di questi sviluppi.

– Si tratta dunque di attenersi alla dimensione reale del problema. Ciò che io mi chiedo è, in altri termini, se non dobbiamo prendere atto, appunto realisticamente, di un momento nuovo nel rapporto tra l'uomo del novecento e la tecnologia del novecento, tra noi e la nostra tecnologia. Per caratterizzare questo momento nuovo parlerei forse di una sorta di pacificazione, o, ancor meglio, di superamento del disagio di fronte agli eccezionali sviluppi tecnologici che il secolo XX ha conosciuto e che fanno parte della sua storia più interna e profonda. Questo disagio ha dato luogo a forme equivoche di rifiuto, a posizioni catastrofistiche, ad atteggiamenti depressi e deprimenti di fronte alla tecnica. *L'uomo è diventato antiquato* – si è detto efficacemente, cioè con un'efficace dichiarazione di impotenza. Una eco di questo disagio si avverte in realtà anche in molti discorsi orientati in direzioni opposte, nei discorsi euforici piuttosto che in quelli depressi.

– A me sembra che si debba prendere atto del fatto che ci stiamo ormai rappacificando con la nostra tecnologia, che il disagio di un tempo stia venendo meno. Non abbiamo dunque più bisogno di sentirci impotenti e nemmeno onnipotenti, e stiamo cercando, e forse in parte, abbiamo già trovato, un giusto punto di equilibrio, un più corretto punto di vista per comprendere, giudicare e valutare. Bisogna insomma prendere atto del fatto che l'uomo del terzo millennio non è affatto diventato antiquato, ma è diventato adulto, forse è addirittura invecchiato, e dalla vecchiaia ha tratto saggezza e sottratto illusioni. Sarebbe un grave errore non tenerne conto.

X

Appendici

*Esempi di impiego di procedure realizzate
con il programma “Mathematica”*

Avvertenza

Nel corso della mia attività, mi sono imbattuto in varie occasioni nella necessità di ricorrere al sapere matematico, rendendomi conto ben presto di quanto questo sapere interagisca con la riflessione filosofica, come del resto insegna tutta la sua storia. Certamente, non si deve concepire il rapporto tra matematica e filosofia nel modo stigmatizzato da Gian-Carlo Rota nel suo coraggioso saggio, *The Pernicious Influence of Mathematics Upon Philosophy* (1991). In una parola: secondo Rota è un errore ritenere che la logica che si è rinnovata nel secolo ventesimo, proprio in forza di una accentuata matematizzazione, debba rappresentare il mezzo fondamentale per un rinnovamento anche della filosofia. È vero invece che essa è diventata un «pezzo di matematica» ovvero una disciplina formale che «è ormai solo un altro ramo della matematica, come la topologia e la teoria della probabilità» (p. 168). E d'altra parte «pochissimi logici del nostro tempo ormai credono che la logica matematica abbia qualcosa a che fare con il nostro modo di pensare» (ivi). Di contro, e paradossalmente, «i filosofi di oggi (non tutti, fortunatamente) credono invece grandemente nella matematizzazione. Essi hanno riscritto la famosa frase di Galileo leggendola così: 'Il grande libro della filosofia è scritto nel linguaggio della matematica'» (ivi, p. 167). E questo è appunto *pernicious* perché la filosofia da un lato ha una problematica autonoma e «le asserzioni della filosofia, per quanto possano essere parziali e azzardate, sono più prossime alla verità della nostra esistenza che le prove della matematica»; dall'altro, proprio il fatto che non si dia soluzione unica e definitiva ad un problema filosofico mostra che la filosofia è luogo di una discussione e di una riflessione aperta che viene soppressa dall'«imitazione servile (*slavish*) della matematica» (p. 167).

Credo che alle parole di Rota si debba aggiungere che un conto è l'idea illusoria che i libri di filosofia debbano essere scritti in modo tale che il maestro di logica-matematica possa cor-

reggerli con la matita rossa e blu fra le mani, come un normale compito in classe della matematica, come era insegnata una volta e come probabilmente è insegnata tuttora; ed un altro è riconoscere che la matematica dia al filosofo, da vari punti di vista, molto da pensare. Le osservazioni di Rota colgono e colpiscono giustamente una linea di tendenza fuorviante ed oppongono ad essa un netto rifiuto, che lo scopo polemico dello scritto rende forse anche troppo rigido; e tuttavia esse dovrebbero essere integrate dal riconoscimento, certamente non estraneo alle sue posizioni, che vi è un intreccio nelle due direzioni – cosicché talvolta potresti non saper districare il punto in cui filosofia, filosofia della matematica e matematica pura si separano. Entrare in questo intreccio, estrarne i problemi e le ragioni sia dal punto di vista teorico che da quello storico è, io credo, il compito di una riflessione epistemologica.

Ma vi è un altro punto su cui voglio richiamare l'attenzione per rendere conto delle appendici seguenti. Si trattava per me di riprendere il percorso avviato alla meno peggio nell'insegnamento medio, non tanto per colpa di maestri ed insegnanti spesso ottimi e volenterosi, ma proprio per un atteggiamento generale, che metteva da parte ogni riferimento ed ogni discussione epistemologica, per privilegiare l'aspetto del calcolo e delle sue regole nella sua forma più brutale e più cieca. Ho ricordato, in questi frammenti, la frase di Klein, grande matematico, che ha fra i suoi meriti l'interesse per la pedagogia della matematica: «Così stanno le cose, e se non sai che stanno così, saranno guai per te» (1933, p. 7). Ora, per riprendere questo percorso è stato decisivo un utilizzo intensivo dell'ammirevole programma informatico *Mathematica* di Stephen Wolfram. Mi è sembrato infatti che per risalire la china, la cosa migliore fosse riprendere i concetti matematici a partire dall'algebra elementare *interrogando* direttamente il programma in questione e considerando le sue risposte. È stata un'esperienza straordinaria, perché mi ha consentito non solo di rivedere *sotto una luce nuova* i vecchi concetti

comprendendoli assai meglio e in modo più profondo, ma di procedere ben oltre le poche cose che mi erano state insegnate ai vecchi tempi: riuscendo come beneficio ulteriore a trovare risposte ad alcuni interrogativi nei quali le mie ricerche si erano in diversi punti imbattuti.

Le seguenti appendici non documentano certo tutto il percorso da me compiuto, ma forniscono alcuni esempi del lavoro svolto. Esse si limitano a presentare sinteticamente le procedure da me realizzate e impiegate in alcuni dei miei testi nei quali esse erano state solo sommariamente indicate e talvolta solo sottintese. L'utilità di questo programma informatico è stata per me molto più ampia di quanto possa apparire qui. Inoltre le sue "capacità" di gestire il suono sono andate crescendo con gli aggiornamenti via via introdotti nelle versioni che si sono avvicinate. Al momento in cui scrivo (2015), il lettore può avere un'idea della ricchezza di *Mathematica*, anche sotto il profilo degli interessi della teoria della musica, all'indirizzo internet

<http://demonstrations.wolfram.com/topic.html?topic=Music&limit=20>

Naturalmente, non posso far altro che presupporre la conoscenza di *Mathematica* da parte del lettore. Desidero tuttavia segnalare anche l'ottima, estremamente sintetica, ma anche molto densa, *Introduzione all'uso di Mathematica* di Marco Bramanti che si può trovare all'indirizzo www1.mate.polimi.it/~bramanti/manuale/manuale.pdf.

Per consentire l'eventuale effettivo utilizzo, verifica e miglioramenti delle procedure proposte in queste appendici, esse verranno pubblicate anche in versione cdf nel mio Archivio Internet. Il formato cdf è leggibile attraverso *Mathematica* oppure attraverso il programma *CdfPlayer* distribuito gratuitamente dalla Wolfram.

I.

Procedure formali per la costruzione
della successione dei numeri naturali

Nel volume *Numero e figura. Idee per un'epistemologia della ripetizione* (Piana, 1999) ho impiegato un metodo inconsueto, che io sappia, per introdurre l'idea di numero naturale. In due parole: ho preso le mosse dagli usi correnti, legati alle pratiche quotidiane del conteggio, distinguendo anzitutto tra *numero di...* e numero come *oggetto in sé*. Il numero di... deve poi essere specificato con *numero di oggetti* e *numero di posizione* (cardinalità e ordinalità), che chiamano entrambi in causa l'idea di molteplicità. Vi sono tuttavia altre due possibili modalità di impiego: *il numero di volte*, che risulta ovvio chiamare *numero iterativo*, e che mette in questione l'idea della ripetizione e dunque rimanda ad una qualche azione od operazione. La seconda possibilità riguarda il numero che la grammatica corrente chiama *numero distributivo*, che ad un tempo evoca l'idea della molteplicità suddivisa e regolarmente raggrupata e l'idea di un'operazione appunto "distributiva". Nell'ordine, essi rispondono alla domanda "Quanti?", "In quale posizione?", "Quante volte?", "Quanti per volta?". Nella prima parte di quel testo si traccia un percorso che mostra in che modo, per pervenire alla successione dei numeri naturali, e quindi alla serie aritmetica fondamentale, queste nozioni si intreccino variamente; e nello stesso tempo quel percorso insegna come sia essenziale, per l'aritmetica, l'interazione tra livello propriamente segnico e quello concettuale. In questo mio testo si procede secondo un orientamento "formalistico" ed il passo conclusivo di questo percorso è l'esibizione di un algoritmo con cui è possibile produrre la successione dei numeri naturali costruita su una base qualsivoglia. La procedura di calcolo è stata realizzata con *Mathematica*. In *Numero e Figura* dedico un cenno ad essa, ma mi sembra ora opportuno apportarle qualche miglioramento e inte-

garla con qualche osservazione ulteriore.

Forse non c'è esempio migliore per dimostrare la distanza tra punto di vista logicista e punto di vista formalista (uso questo termine in un'accezione ampia) che considerare il modo in cui viene affrontato il problema della successione dei numeri naturali. Il logicista propone una definizione della nozione di "successore immediato". In Frege questa definizione suona così:

«La proposizione 'Vi è un concetto F e un oggetto x che cade sotto di esso tale che il numero che spetta al concetto F sia n e il numero m spetti al concetto 'cadere sotto F , ma non sia eguale a x ' ha lo stesso significato di " n segue immediatamente m nella serie dei numeri naturali'» (Frege, 1884, p. 89).

Questa definizione, del tutto conforme all'impalcatura teorica di Frege, viene spiegata da Kenny come segue: "Il significato di ciò può essere illustrato, una volta di più, con un esempio non-logico. Si prenda il concetto Monarca Tudor. Il numero appartenente a questo concetto, lo sappiamo dalla storia inglese, è 5. Vi sono dunque cinque oggetti che cadono sotto di esso. Prendiamo ora l'oggetto Re Enrico VIII. Il numero che spetta al concetto 'Monarca Tudor non identico con Enrico VIII' è 4. E 5 è in effetti il successore immediato di 4 nella serie dei numeri" (Kenny, 2000, p. 94).

Qualcuno potrebbe trovare questa caratterizzazione non troppo entusiasmante così come il suo seguito, chiaramente illustrato da Kenny (2000, pp. 94 sgg.). Ma il suo scopo non è quello di generare o meno entusiasmi. È certo invece che, come ho detto or ora, questa caratterizzazione è del tutto coerente con l'impostazione di Frege. Il vero problema è che in essa sembra non esservi traccia di una modalità di concatenazione interna da numero a numero – trattandosi del resto di una questione puramente definitoria e non di *formazione* della successione. A dire il vero, nel seguito una parvenza di concatenazione c'è – assai abi-

le e che sarebbe stata molto apprezzata da un sofista antico. Ma a mio avviso, e naturalmente posso sbagliare, solo una parvenza. D'altra parte anche il linguaggio usato da Frege per introdurre il problema è sintomatico: «Voglio ora chiarire la relazione nella quale due membri *vicini* della serie dei numeri naturali *stanno l'uno rispetto all'altro*» (corsivo mio) (*Ich will nun die Beziehung erklären, in der je zwei benachbarte Glieder der natürlichen Zahlenreihe zu einander stehen*) (Frege, 1884, p. 89 – Nella traduzione italiana che rende «Voglio ora chiarire in quale relazione stanno fra loro due termini successivi della successione dei numeri naturali» viene perduta un'importante sfumatura di senso del testo tedesco). Nel § 75 delle *Grundlagen* viene anzitutto definito lo 0 in questo modo: «0 è il numero naturale che spetta al concetto 'disuguale da se stesso'», cosicché (a patto di accettare che l'espressione 'disuguale da se stesso' sia da considerare un concetto – e non un nonsenso – eventualità di cui Frege si rende conto, difendendo questo cruciale punto di partenza), ci liberiamo di Venere e dei suoi pianeti, dei re d'Inghilterra e di qualunque grezza empiria. Dopo di ché (la facciamo in realtà molto breve) il numero 1 verrà definito come «il numero naturale che spetta al concetto 'uguale a zero'» – il quale ultimo concetto in effetti ha un unico oggetto che cade sotto di esso, lo 0, per l'appunto: di cui il numero 1 sarà successore immediato, in virtù della definizione precedente proposta. Per la generalizzazione di questo inizio occorreranno altri sviluppi, ma a me sembra che risulti abbastanza chiaro che, più che l'idea di una concatenazione, prevalga l'idea dell'*essere l'uno accanto all'altro* – un puro dato di fatto dimostrato a rigor di logica, verrebbe voglia di dire. Stando a questi sviluppi, nessuna *catena aritmetica* avrebbe mai potuto *sorgere*, e quindi nessuna aritmetica in generale. Ma anche questo non è un problema per Frege, per il quale l'aritmetica non ha alcuna origine, non sorge, c'è già, c'è sempre stata e sempre ci sarà. Val la pena forse di aggiungere che questo problema del successore immediato resta una croce irrisolta per Frege dopo la scoperta del paradosso di Russell. Nei

vari tentativi di superarlo, ve ne è uno che evita il paradosso, ma che incorre in una contraddizione proprio in rapporto a questo problema. Secondo la sua nuova proposta, chiaramente illustrata da Cellucci, 1995, non si può dimostrare senza contraddizione che ogni numero naturale ha un successore. «La dimostrabilità nel sistema di una proprietà dei numeri naturali così fondamentale come quella che ogni numero naturale ha un successore, ovviamente era essenziale per il programma di Frege di fondare l'analisi infinitesimale sulla logica: un sistema in cui non fosse stata dimostrabile una proprietà così elementare non sarebbe stato idoneo per una tale fondazione. È ragionevole supporre che, essendosi reso conto che la sua soluzione del paradosso di Russell non permetteva di dimostrare la proprietà in questione, e quindi di realizzare il suo disegno logicista, e non riuscendo a trovare una soluzione alternativa, alla fine egli si sia convinto che non esistevano altre soluzioni e che il disegno logicista era irrealizzabile» (ivi, p. 23).

Rispetto ad un punto di vista che invece fornisce un sistema di regole che rappresenta lo schema generatore della successione risulta con la massima evidenza l'idea della concatenazione. Ma a questo scopo è necessario passare al *segno numerico* ed alla sua costruzione.

Prenderemo le mosse dalla *notazione tratto*, che rappresenteremo con il noto segno dell'unità aritmetica, benché potremmo scegliere qualunque altro grafema. Esso non ha, nel nostro contesto di discorso, alcun significato aritmetico “vero e proprio” ma rappresenta una successione di segni costruita attraverso una semplice regola ricorsiva. Avendo di mira l'idea della “base” del sistema, parleremo di *BaseUno* ben sapendo che si tratta di una espressione *del tutto impropria*, perché la base è un *raggruppamento* che forma “grandi unità”. Ma questa improprietà ci è utile per segnalare che la “concatenazione” ha qui il suo esempio più semplice. Tutto il resto viene da sé. Abbiamo inoltre bisogno di un segno che funga da variabile per grafemi e sceglieremo il

segno “x”.

```
BaseUno[k_]:=
  {L1={"x"};
  Do[L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],"x"@"1x"],{k}];
  L1=Drop[L1,1];
  L1=StringReplace [L1,"1x"@"1"];
  L1=StringJoin[Riffle[L1,""]];
  L1
  };
```

Esempi:

```
BaseUno [1]
{1}
```

```
BaseUno [2]
{11}
```

```
BaseUno [5]
{11111}
```

È bene mettere subito in evidenza che il numero in parentesi quadre [k_] che fa da parametro all'operazione è un *iteratore* scritto in notazione decimale, mentre il grafema che compare tra parentesi graffe come *output* dell'operazione BaseUno potrà essere interpretato come il numero prodotto per applicazione ricorsiva in corrispondenza con il valore dell'iteratore. Deve essere chiaro infatti che, benché la procedura lavori unicamente sull'aspetto segnico-grafico, l'aspetto concettuale forma la linea guida di chi realizza la procedura. È pura ingenuità pensare che il matematico formalista non faccia altro che giocare con i segni; così come non gli si deve credere nemmeno quando fa sfoggio di disinteresse per il livello del significato (e molti logici cascano nel suo gioco).

Il numero, diceva Wittgenstein nel *Tractatus* (1961) ponendosi sul lato opposto del logicismo e anticipando uno spunto

significativo (anche se non sviluppato) del punto di vista ricorsivo, è «l'esponente di operazioni» (oss. 7.021). Il senso di questa formulazione, che ho tentato di spiegare nella mia *Interpretazione del Tractatus di Wittgenstein* (1973), è quello di formulare un algoritmo generatore della serie numerica, attraverso l'iterazione ricorsiva di un'operazione, in cui il numero compare come contatore delle iterazioni. Nonostante differenze significative rispetto all'algoritmo proposto da Wittgenstein, che il mio lettore potrà verificare per proprio conto, la cornice entro cui proponiamo il problema è analogo; e per altri versi, entro questa cornice vi sono idee che Husserl formula nell'ultimo capitolo della sua *Filosofia dell'aritmetica* e da cui abbiamo già avuto occasione di citare in questi *Frammenti* la frase « il metodo dei segni sensibili è il metodo *logico* dell'aritmetica» (Husserl, 1970, p. 257).

Ma noi sappiamo che la notazione tratto è del tutto insoddisfacente. Il passaggio all'aritmetica vera e propria avviene attraverso la possibilità del “raggruppamento” attraverso una base. Ora, questa possibilità segue esattamente la logica della procedura BaseUno, cioè la logica della concatenazione ricorsiva. Ciò che cambia è unicamente il fatto che *le regole di sostituzione dovranno essere tante quante sono le cifre della base*. Se la base è due, dovranno essere due le regole di sostituzione. Chiamiamo questa nuova procedura *BaseDue*.

```
BaseDue [k_ ]:=
{
L1={"1x"};L2={};
Do[{L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"0x"}]],
    L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"1x"}]],
    L2=Append[L2,First[L1]], L1=Drop[L1,1]},{k}];
Last[L2]
};
```

Naturalmente vi è qui una complessità relativamente maggiore. Le regole, ricorsivamente applicate, sono appunto due, e la sostituzione avviene con i grafemi 0 e 1, come di consueto nel siste-

ma a base binaria. Due sono anche le liste L1 e L2: L1 raccoglie i nuovi valori per ogni iterazione, L2 i valori via via eliminati da L1. Naturalmente sarebbe possibile un'istruzione che forma una lista L3, costituita dall'unione tra L2 e L1 (nell'ordine) che raccoglierebbe tutti i valori prodotti all'iterazione corrente. L'output è rappresentato dall'ultimo valore di L2, che viene ripreso con l'istruzione Last[L2], e propone il grafema interpretabile numericamente. Anche in questo caso vi è corrispondenza tra l'iteratore e il grafema qualora sia numericamente interpretato. Poiché l'iteratore è in sistema decimale, la procedura serve anche per convertire una cifra decimale nella stessa cifra in sistema binario. Ciò tuttavia non è il nostro problema. *Mathematica* ha già incorporata un'operazione (*BaseForm*) che opera questa conversione. Il nostro interesse sta soprattutto nel mostrare il rapporto tra numero iterativo ovvero il numero di volte e il numero *sic et simpliciter* (il numero come oggetto in sé in quanto fa parte di una serie concatenata).

Esempi:

```
BaseDue[4]
100x
```

```
BaseDue[8]
1000x
```

Come mostrerebbe un'eventuale lista L3, il segno 100 risulterebbe al quarto posto e il segno 1000 all'ottavo, ovvero rispettivamente alla quarta e ottava iterazione. Ovviamente la *x* può essere eliminata.

A questo punto BaseDieci non ha più bisogno di spiegazioni.

```
BaseDieci[k_]:=
{L1={"1x","2x","3x","4x","5x","6x","7x","8x","9x"};L2={};
  Do[{L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"0x"}]],
```

```

L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"1x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"2x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"3x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"4x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"5x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"6x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"7x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"8x"}]],
L1=Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"→"9x"}]],
L2=Append[L2,First[L1]],L1=Drop[L1,1]],{k}];
Last[L2]
};

```

Esempi:

BaseDieci[4]

4x

BaseDieci[8]

8x

Va notato soltanto che lo 0 non compare nelle cifre di inizializzazione, ma nelle regole. Come in precedenza il numero delle regole di sostituzione è pari al numero della base. Ed ovviamente, essendo l'iteratore proposto nel sistema decimale, anche il grafema è lo stesso, avendo del resto scelto le cifre consuete. È opportuno sottolineare che in tutte queste procedure non vi è nemmeno l'ombra dell'addizione, cioè di una operazione aritmetica del tipo "+1".

2.

Procedure per realizzare un linguaggio L-systems

Sui linguaggi L-systems, particolarmente adatti a trattare i frattali, vi è una vasta bibliografia di cui il lettore può prendere visione nel sito della Wolfram

<http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html>

Naturalmente vi sono numerosi esempi di impiego di L-systems già elaborati in *Mathematica*. A questo proposito puoi vedere l'indirizzo

<http://mathworld.wolfram.com/LindenmayerSystem.html>

Ma per i miei scopi – in particolare per la seconda parte del mio volume *Numero e figura* – era per me importante realizzare per mio conto un programma apposito in modo da poterlo pienamente controllare con coscienza di causa. Nel volume citato mi limitavo a segnalare che per un simile linguaggio occorre 1. stabilire una stringa di lettere da intendere come semplici grafemi, che deve valere come stringa iniziale (detta anche assioma), una regola di sostituzione per ciascun grafema, ed eventuali condizioni aggiuntive. 2. In secondo luogo sarà necessaria una procedura che trasformi la stringa iniziale in una stringa finale mediante l'applicazione ricorsiva delle regole e delle condizioni, secondo un numero dato di ripetizioni. 3. La stringa finale di grafemi dovrà poi essere trasformata, attraverso una ulteriore procedura, in valori numerici che rappresentano le coordinate di schermo che sono necessarie alla sua rappresentazione ed alla stampa della figura ottenuta. Quest'ultima operazione non ha bisogno di essere esplicitamente programmata, perché è realizzata automaticamente da *Mathematica*. Altrettanto automaticamente vengono regolate le proporzioni delle figura finale.

Naturalmente si potranno stabilire costanti e variabili, le condizioni potranno variare secondo le nostre necessità, e – cosa particolarmente importante – potremo introdurre dei grafemi a piacere e le interpretazioni corrispondenti non previste nella versione standard, possibilità di cui ho ampiamente approfittato nel mio testo. Per semplificare le cose costruiamo il nostro algoritmo L- system in tre passi.

Primo passo

Il primo passo consiste nello stabilire una stringa iniziale, una o più regole ed eventuali condizioni.

Esempio:

```
assioma = "F-F";
regola = {"F"→"F+F"};
angolo = 45;
```

Naturalmente ciò che chiamiamo “assioma” è la stringa iniziale. Il segno di freccia è un’operazione incorporata in *Mathematica* che stabilisce che al grafema di sinistra può essere sostituito quello di destra. Il segno F e il segno “+” e, eventualmente, “-”, che qui non hanno nulla a che vedere con le operazioni aritmetiche, saranno in seguito interpretati in termini grafici. Conviene anticipare fin d’ora per chiarezza che F verrà interpretato come un segmento, la cui lunghezza è inizialmente predeterminata dal programma stesso, ma che è modificabile dall’utente. I segni “+” e “-” sono invece segni di direzione per F. In particolare segno “+” riguarda la direzione del segmento da destra verso sinistra. Inversamente il segno “-” indicherà la direzione del tratto da sinistra a destra. Queste anticipazioni sono necessarie, intanto perché rendono conto di “angolo” che va inteso come una condizione che riguarda le direzioni del segmento. Ovviamente qui si stabilisce che l’angolo eventuale di deviazione del segmento sia pari a 46 gradi. Alla più semplice versione standard appartiene anche il segno “!” che impone l’inversione reciproca dei segni + e -. Tuttavia va tenuto presente che da questa semantica possiamo per il momento prescindere perché il nostro scopo iniziale è semplicemente quello di creare ricorsivamente una stringa di segni (figure) che contenga i segni F e +, - ed altri segni eventuali prestabiliti nell’algoritmo.

Secondo passo

Il secondo passo è in realtà formato da due istruzioni (o procedure).

Una procedura che chiameremo “StringRec” – non essendo una procedura “pronta” la possiamo chiamare come vogliamo – che definiremo nel modo seguente:

```
StringRec[strin_]:=StringReplace[strin,regola];
```

Il segno := è il modo in cui *Mathematica* introduce le procedure e il tratto sottoscritto a “strin” tra parentesi quadre indica trattarsi di un parametro variabile della procedura in questione. Quest’ultima agisce sulle stringhe, e quindi anzitutto sulla stringa iniziale in conformità della regola operando, stando al nostro esempio elementarissimo, per ogni F una sostituzione con F+F.

Esempio:

```
StrinRec[assioma]
```

darà come risultato

```
F+F-F+F
```

La seconda istruzione che ci è utile in questo secondo passo la chiamiamo Calc1 e la definiremo nel modo seguente:

```
Calc1[iter_]:= {string1=Nest[StrinRec,assioma,iter],lista1=Characters[string1],iterator=Length[lista1]};
```

iter_ è il parametro che stabilisce il numero di iterazioni volute, *Nest* è una procedura pronta di “annidamento ricorsivo”. Nell’esempio seguente il risultato è una stringa *f* applicata ricorsivamente tre volte all’espressione *x*.

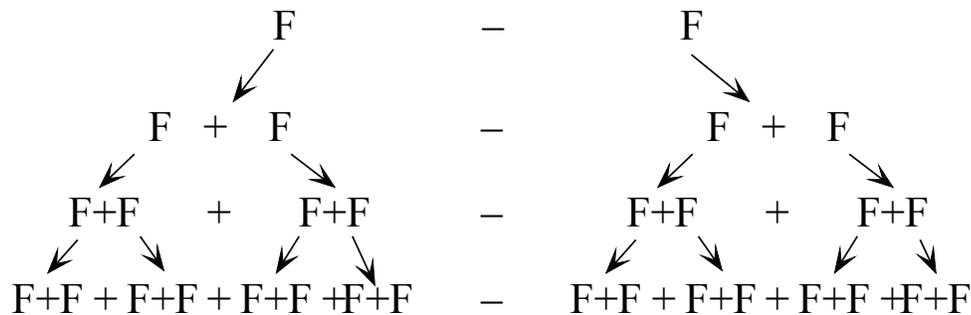
Esempio:

```
Nest[f,x,3]
f[f[f[x]]]
```

Nella procedura Calc1 si realizzano due liste: *string1* attraverso l'applicazione ricorsiva di *Nest*; poi attraverso la procedura pronta *Characters*, che separa carattere per carattere i grafemi realizzati in *string1*, si realizza una seconda stringa, qui chiamata lista1. La funzione fondamentale di Calc1 è in effetti quella di creare una lista di grafemi separati. Alla variabile *iterator* viene assegnato il numero degli elementi della lista1. Mettendo in opera Calc1 sul risultato precedentemente ottenuto F+F-F+F otteniamo:

```
Calc1[3]
{F+F+F+F+F+F+F+F-F+F+F+F+F+F+F+F,
 {F,+,F,+,F,+,F,+,F,+,F,+,F,-,F,+,F,+,F,+,F,+,F,+,F,+,
 ,F},31}
```

Ciò che ha fatto questa procedura lo si vede in una disposizione ad albero.



Terzo passo

Compito principale di questo terzo passo è l'*interpretazione* dei grafemi presenti nella lista1, realizzando nello stesso tempo i

valori delle coordinate di schermo utili per la rappresentazione grafica, operazione, quest'ultima, compiuta direttamente dal programma. Nel primo passo abbiamo stabilito un sistema molto semplice

```
assioma = "F-F";
regola = {"F"→"F+F"};
angolo = 45;
```

nel quale compaiono soltanto i segni F, + e – (e dunque anche “!” per l’inversione di direzione, e una sola condizione – un angolo di 45 gradi. Costruiamo dunque la seguente procedura che si serve solo di questi elementi. Con questa semplificazione si comprenderà l’essenziale anche in rapporto a casi più complessi.

Dobbiamo naturalmente anzitutto operare delle inizializzazioni che provvedano anche a liberare le variabili da assegnazioni eventuali precedenti e disponiamo già di Calc1 che provvede a fornirci *lista1* che contiene i grafemi prodotti secondo il numero delle iterazioni.

```
Iniz := {Clear[lung], Clear[lista2], a = {0, 0}, ultx = a, lista2 = {ultx}, lista3 = {}, lung = 1, inverti = True, angfin = 0}
```

```
Calc1[iter_] := {string1 = Nest[StrinRec, assioma, iter], lista1 = Characters[string1], iterator = Length[lista1]};
```

Attraverso la seguente nuova procedura che chiameremo Calc2 forniamo una “interpretazione” dei segni che predispone alla conversione in un grafico.

```
Calc2 := {Do
[
{If[IntegerPart[angfin] > Abs[360], angfin = Mod[angfin, 360]},
Switch[First[lista1],
"F", {a = ultx + {N[lung*Cos[angfin*Degree]], N[lung*-
```

```

Sin[angfin*Degree]]},
  ultx = a, lista2 = Append[lista2, a], lista1 = Drop[lista1,
1]],
  "+", {If[inverti, angfin = angfin + angolo, angfin = angfin -
angolo], lista1 = Drop[lista1, 1]},
  "-", {If[inverti, angfin = angfin - angolo, angfin = angfin +
angolo], lista1 = Drop[lista1, 1]}],
  },{iterator}
],Null
};

```

Sui dettagli di questa procedura non è il caso di indugiare. Basti notare che l'istruzione che fa da motore a questa procedura è *Switch*, che è un'istruzione incorporata, la quale, indicato un segno, lo ricerca in una lista data e quando lo trova lo sostituisce con il segno o l'operazione immediatamente successiva:

Esemplificativamente:

```

Input: Switch["H", "R", "Z", "H", 2+2]
Output: 4

```

Switch cerca il segno "H" che è l'espressione che occupa la prima posizione. L'espressione da cui "H" viene sostituito è quella che segue il primo "H" successivamente incontrato, e poiché nell'esempio si tratta di un'operazione di addizione essa viene eseguita. "H" viene dunque "scambiato" con 2+2.

Nella nostra procedura *Switch* cerca "F"(oppure "!", "+", "-") come primo valore della lista1, quando lo trova lo realizza in base alla definizione e lo aggiunge nella lista2 togliendo il primo grafema dalla lista1. Alla fine resta la lista2 che contiene unicamente le coordinate di schermo per la traccia grafica. A questo punto si aggiungerà una istruzione che abbiamo chiamato SL che faccia da *traccialinee* congiungendo nell'ordine dovuto le coordinate di schermo.

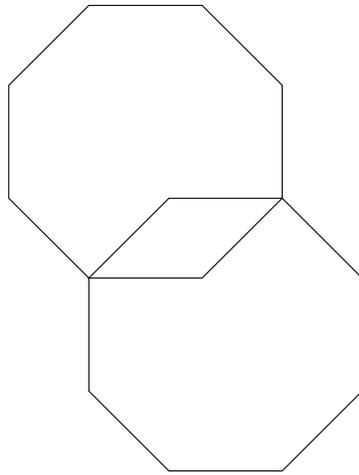
```
SL:=Show[Graphics[Line[lista2]],AspectRatio->Automatic];
```

Con questa istruzione *Mathematica* stessa sistema le cose per per quanto riguarda le proporzioni della figura risultante che peraltro possono essere modificate proporzionalmente in modo manuale. Naturalmente queste diverse procedure possono essere riunite in un'unica procedura che abbiamo chiamato *Prog* e che ha come unico parametro il numero di iterazioni che si vogliono realizzare.

```
Prog[iteraz_]:= {Iniz;Calc1[iteraz];Calc2;SL};
```

Nel caso del nostro esempio con tre iterazioni si ottiene la figura seguente:

```
Prog[3]
```



(In questo caso particolare le ripetizioni oltre “tre volte” rifanno lo stesso percorso e non producono nuove figure).

Nel volume *Numero e figura* ho naturalmente usato una procedura più complessa, aggiungendo nuovi segni e le regole corrispondenti, ma nella sostanza la struttura dell’algoritmo è lo stesso che

in questo caso più semplice. Restando identico tutto il resto, si possono introdurre modifiche a piacere in Calc2, cosa che rende l'impiego di questa procedura particolarmente e maneggevole. Precisamente la procedura da me utilizzata è la seguente:

```
Calc2:=
{Do[{If[Int[angfin]>Abs[360],angfin=Mod[ang-
fin,360]],Switch[First[lista1],
"F",{a=ultx+{N[lung Cos[angfin Degree]],N[lung Sin[an-
gfin Degree]]},
ultx=a,lista2=Append[lista2,a],lista1=Drop[lista1,1]},
"P",{angfin=angolo,a=ultx+{N[lung Cos[angfin Degre-
e]],N[lung Sin[angfin Degree]]},ultx=a,lista2=Append[li-
sta2,a],lista1=Drop[lista1,1]},
"Q",{angfin=-angolo,a=ultx+{N[lung Cos[angfin Degre-
e]],N[lung Sin[angfin Degree]]},ultx=a,lista2=Append[li-
sta2,a],lista1=Drop[lista1,1]},
"R",{lung=lung molt,lista1=Drop[lista1,1]},
"H",{lung=lung/molt,lista1=Drop[lista1,1]},
"!",{inverti=!inverti,lista1=Drop[lista1,1]},
"+",{If[inverti,angfin=angfin+angolo,angfin=angfin-an-
golo],lista1=Drop[lista1,1]},
"-",{If[inverti,angfin=angfin-angolo,angfin=angfin+ango-
lo],lista1=Drop[lista1,1]},
"|",{angfin=angfin+180,lista1=Drop[lista1,1]},
"${angfin=angolo+incr,lista1=Drop[lista1,1]},
_,{lista1=Drop[lista1,1]}},{iterator}],Null};
```

Nel volume citato si fornisce una larga esemplificazione di ciò che si può realizzare con questa routine e dei problemi teorico-filosofici che l'uso di questo linguaggio propone.

3.

Procedure di calcolo per il "triangolo" di Sarngadeva

Nel saggio *La serie delle serie dodecafoniche e il triangolo di Sarngadeva* mi sono in particolare occupato del metodo escogitato da Sarn-

gadeva per raccogliere in unità “tutte le permutazioni possibili delle sette note della scala *sagrama* illustrando anche un metodo pratico per il loro completo dominio. Precisamente si tratta di realizzare una duplice operazione: da un lato, ad ogni permutazione deve poter essere associato un numero, dall’altro deve essere possibile «estrarre» da un determinato numero - ovviamente compreso tra 1 e il numero massimo di permutazioni possibili - la permutazione ad esso associata”.(Piana, 2000). Si tratta dunque di percorrere due “vie”: 1. dalla serie ad un numero univocamente determinato (via *uddista*); da questo numero alla serie corrispondente (via *nasta*).

A parte le spiegazioni fornite dall’autore, la procedura è naturalmente formalizzabile in un algoritmo distinto in due parti:

1. $Seq \rightarrow s \rightarrow c \rightarrow Numseq$

2. $Numseq \rightarrow c \rightarrow s \rightarrow Seq$

dove *Seq* è una variabile di lista per i nomi delle note. Ovviamente questo vale per il nostro caso, ma il riferimento musicale è secondario. *Seq* può essere considerata come una lista di grafemi, che possono essere intesi come nomi di oggetti in genere (note, numeri, ecc.); *s* e *c* sono liste, la prima delle quali abbiamo chiamato *lista degli indici di spostamento di posizione*, la seconda, costruita sulla base della prima, *lista dei costituenti del numero della sequenza* dalla cui somma viene determinato *Numseq*.

Naturalmente per venire a capo di ciò che sto dicendo, converrà che il lettore tenga sott’occhio sia la matrice triangolare che ho chiamato “triangolo di Sarngadeva”, sia il metodo pratico che ho escogitato per operare con esso mediante anelli e gettoni e tutte le spiegazioni relative che non è possibile ripetere qui. Analogamente mi limito ora a proporre la procedura da me escogitata, assente da quel saggio, senza fare commenti che esigerebbero a loro volta una completa ripetizione di ciò che è già stato detto.

La matrice triangolare proposta da Sarngadeva è la seguente:

1	0	0	0	0	0	0
	1	2	6	24	120	720
		4	12	48	240	1440
			18	72	360	2160
				96	480	2880
					600	3600
						4320

A parte la prima riga, la seconda riga è costruita con il fattoriale di n con n che varia da 1 a 6. Le altre righe sono ottenute attraverso una moltiplicazione progressiva dei numeri della seconda riga, a partire da 2, per il numero di celle di ciascuna colonna – ovvero moltiplicando $2*2$ per la terza colonna, $6*2$ e $6*3$ per la quarta colonna, ecc. Ai tempi in cui scrissi il saggio in questione, non mi ero reso conto che, a partire dalla terza riga, i rapporti di una riga con la riga precedente sono già musicalmente significativi. Essi infatti rappresentano i rapporti di consonanza presenti e variamente usati in diverse tradizioni musicali, e precisamente $2/1$ (ottava secondo la terminologia corrente), $3/2$ (quinta), $4/3$ (quarta), $5/4$ (terza maggiore), $6/5$ (terza minore). Questa è in ogni caso una singolarità interessante, ma che non interviene nella costruzione dell’algoritmo, il quale del resto, come abbiamo già detto, non deve avere necessariamente un’interpretazione musicale, ma riguarda la problematica più generale del calcolo delle permutazioni e del loro ordinamento.

Il passaggio calcolistico presuppone le seguenti liste:

triang = {{1},{0,1},{0,2,4},{0,6,12,18},{0,24,48,72,96},{0,120,240,360,480,600},{0,720,1440,2160,2880,3600,4320}};

standard={sa,ri,ga,ma,pa,da,ni};

Evidentemente esse rappresentano niente altro che una descrizione del triangolo, comprendendo “triang” le liste corrispondenti ad ogni colonna, “standard” i nomi indiani delle sette note. Si noti che il primo numero di ogni riga si presenta come ultimo di ogni lista; ed inoltre che ogni casella può essere caratterizzata da una coppia di numeri, come in ogni matrice. Abbiamo poi bisogno di procedure per realizzazione delle liste S e C che consentano il passaggio da Seq a Numseq e inversamente. La relazione che intercorre tra queste due liste è spiegata nel saggio. In breve data una lista Seq che sia una variante della lista standard, essa andrà confrontata con questa *a partire da destra verso sinistra*.

Esempio:

ma ga sa ri pa da ni
sa ri ga ma pa da ni

Se non vi è spostamento di posizione si attribuisce l'indice di posizione 1. Se vi è spostamento di posizione si conteggia, sempre da destra a sinistra, lo spostamento, comprendendo gli estremi. Da entrambe le sequenze si cancellano via via le note che sono state indicizzate. Nell'esempio cominciamo dunque con 1, 1, 1. Otteniamo così per il confronto

ma ga sa ri
sa ri ga ma

La nota *ri* verrà indicizzata con 3 (come abbiamo detto il conteggio include gli estremi) ed otteniamo le sequenze

ma ga sa
sa ga ma

Come indice di spostamento di sa avremo ancora 3 e le sequenze saranno

ma ga
ga ma

L'indice di spostamento di ga sarà 2 e di ma sarà 1.

ma
ma

In questo esempio la lista degli indici di spostamento *s* sarà dunque 1,1,1,3,3,2,1. Di qui si passa agevolmente alla lista *c*, dal momento che si può considerare la lista precedente come correlata al numero delle colonne considerata sempre da destra a sinistra:

1,1,1,3,3,2,1
7,6,5,4,3,2,1

È allora interessante notare che abbiamo a che fare con coppie di numeri che possono essere intesi come individuanti la cella corrispondente della matrice triangolare. Ad es. 1,7 indicherà la cella della prima riga e della settima colonna, la coppia 4,3 la cella della quarta riga e terza colonna ecc. I numeri contenuti nelle celle così indicate formerà la lista *c*, che sarà dunque {0,0,0,12,4,1,1}, numeri che sommati insieme forniscono *Numseq* ovvero 18. La procedura che chiamiamo anche noi *Uddista* porta dalla sequenza che sarà stata preliminarmente assegnata alla variabile *Seq*, attraverso la lista *s* e la lista *c*, create all'interno di essa, a *Numseq*

in output, che risulta dalla somma dei numeri presenti nella lista c.

```
Uddista :={
{
  k =Length[Seq];
  b = Take[standard, {1, k}];
  c = {};
  s = {};
  n = k;
};
{Do[{pos = First[Flatten[Position[b, Last[Seq]]]];
  indice = k - pos + 1 ;
  k = k - 1;
  s = Append[s, indice];
  Seq= Drop[Seq, -1];
  b = Delete[b, pos];
  memors = s;
  },{i, 1, n}]
};

{Do[{c = Append [c, triang[[Length[s],First[s]]]]; s = Drop[s,
1]],
  {i, 1, n}];
  Numseq = Apply[Plus, c]
};
Numseq};
```

Per l'impiego di *Uddista* è sufficiente premettere una sequenza di note assegnandole alla variabile *Seq*. L'output sarà il numero della sequenza *Numseq*.

Esempio

```
Seq = {ma, ri, ga, sa, pa, ni, da};
Uddista
{742}
```

Come si è spiegato, la procedura *Nasta* riporta inversamente dal numero della sequenza, nell'esempio, 742, all'ordinamento di

note corrispondente a quel numero che deve essere assegnato alla variabile *Numseq* in via preliminare.

```

Nasta:={
{numnote=Length[standard];
h = Numseq - 1;
s = {}; c = {}; Seq = {}; colonna=numnote;};
  MaxMinori[listap_,numr_] :=
{
minori = {};lung = Length[listap];
  Do [If[numr >= Part[listap, i], minori = Append[minori, Part[
listap, i]],
{i, 1, lung}];
If[minori == {}, numric = 0, numric = Max[minori]]
};
{Do[{numc=First[MaxMinori[Part[triang,colonna+1-i],h]];
c=Append[c,numc];
pos=Take[Position[Part[triang,colonna+1i],numc],-1];
s=Append[s,pos];h=h-numc},{i,1,colonna-1}];
c=Append[c,1];s=Flatten[s];s=Append[s,1];memors=s;
};
{
stand1=Take[standard,numnote];      Do[{nota=Part[stand1,-First[s]];
Seq=Append[Seq,nota];stand1=Delete[stand1,Position[-stand1,nota]];
s=Drop[s,1]},{x,1,numnote}];
};
Seq=Reverse[Seq]
};

```

Esempio:

```

Numseq= 742;
Nasta

```

```
{ma, ri, ga, sa, pa, ni, da}
```

È tempo ora di dire che il “il numero di Sarngadeva” attribuito ad una sequenza di note non è altro che il numero di ordine che quella sequenza occupa all’interno della serie di tutte le permu-

tazioni possibili della sequenza standard. Cosicché possiamo realizzare un ciclo in cui tali permutazioni vengono effettivamente prodotte, tenendo conto del fatto che la variabile del ciclo prende valori da 1 al fattoriale del numero delle note “standard” – che è nei nostri esempi $7! = 5040$. Al numero 1 corrisponde l’ordinamento proposto in standard, al numero 5040 corrisponde, per usare il linguaggio musicale, il retrogrado di quell’ordinamento.

```
Numseq=1;
```

```
Nasta
{sa, ri, ga, ma, pa, da, ni}
```

```
Numseq = 5040;
```

```
Nasta
{ni, da, pa, ma, ga, ri, sa}
```

La procedura seguente produce nell’ordine tutte le permutazioni mettendo in input il numero delle permutazioni richieste entro l’ambito significativo per 7 oggetti (cioè non oltre 5040), con output a video di *Numseq*, *Seq*, *s* e *c*.

```
Permut[x_]:= Do[
  {Numseq = i,
   numnote = 7;
   Nasta,
   Print[Numseq],
   Print[Seq],
   Print ["lista s = ", memors],
   Print ["lista c = ", c]},
  {i, 1, x}]
```

Per passare ad un altro sistema, ad esempio, a dodici note, occorre soltanto mutare corrispondentemente la matrice su cui viene effettuato il calcolo, e quindi *triang* e *standard*. Esse diventano:

```
triang = {{1},{0,1},{0,2,4},{0,6, 12, 18},
```

```
{0,24,48,72,96},{0,120, 240, 360, 480, 600},
{0, 720, 1440, 2160, 2880, 3600, 4320},
{0, 5040, 10080, 15120, 20160, 25200, 30240,35280},
{0, 40320, 80640, 120960, 161280, 201600, 241920,
282240, 322560},
{0, 362880, 725760, 1088640, 1451520, 1814400, 2177280,
2540160, 2903040, 3265920},
{0, 3628800, 7257600, 10886400, 14515200, 18144000 ,
21772800, 25401600, 29030400, 32659200, 36288000},
{0, 39916800, 79833600, 119750400, 159667200,
199584000, 239500800, 279417600, 319334400,
359251200, 399168000, 439084800}};
```

```
standard = {1, 2 , 3, 4 , 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12};
```

Le procedure invece non hanno bisogno di modifiche. Nella variabile `standard` in luogo dei nomi delle note abbiamo posto dei numeri, che saranno interpretati corrispondentemente, ad es. 2 come `do #` (o `re b`), 4 come `re#` (o `mi b`), ecc.

Voglio infine ricordare qui che il mio saggio è stato di stimolo per una straordinaria ipotesi di reinterpretazione della matrice triangolare di Sarngadeva in chiave di “cosmologia arcaica” da parte Giovanni Ferrero, esperto in questo raro ambito di studi e cultore di informatica umanistica, docente presso l’Università di Genova in *Storia del pensiero scientifico* e responsabile del *Laboratorio di informatica* della Facoltà di scienze della formazione presso la stessa Università. Questo studioso è scomparso nel 2006. Di lui si può apprezzare la personalità e l’opera nel sito

<http://www.cosmologia-arcaica.com>

In questo sito si può trovare anche il saggio dedicato a quella ipotesi di reinterpretazione cosmologica all’indirizzo:

<http://www.cosmologia-arcaica.com/testi/cosmo/india/start.html>

Procedure per la realizzazione di “flussi sonori”

1. Alcune premesse elementari

Non sarà inopportuno all'inizio rammentare telegraficamente alcune nozioni scolastiche che riguardano la funzione $\text{Sin}[x]$. Essa è una funzione periodica con periodo pari a 2Pi . La circonferenza del cerchio, essendo r il raggio, è pari a $2*\text{Pi}*r$, cosicché per $r=1$, la circonferenza misura 2Pi . Vi è dunque una relazione tra tale funzione e la circonferenza di un cerchio, e tra entrambe e l'oscillazione di un pendolo ovvero la vibrazione di un corpo che è produttiva di suono. Il numero di vibrazioni nell'unità di tempo è la frequenza e si misura in Hertz (Hz). Essa è il correlato *fisico* dell'altezza *percettiva*. Il suono prodotto via computer con il solo impiego di una funzione $\text{Sin}[2\text{Pi } t]$, essendo t una variabile che verrà interpretata come variabile temporale, è chiamato “suono sinusoidale”. Un moltiplicatore dell'intera funzione fa variare l'ampiezza dell'onda sonora prodotta. Nel seguito ci occuperemo solo di suoni sinusoidali.

Nel programma *Mathematica* vi sono due istruzioni direttamente incorporate che useremo di continuo. L'istruzione grafica *Plot* che, in particolare, realizza il grafico delle funzioni considerate e l'istruzione *Play* che provvede a tradurre quelle funzioni in termini sonori. Quest'ultima istruzione fornisce anche un grafico di involuppo e dello spettro (quest'ultimo sarà lineare essendo il suono sinusoidale in linea di principio privo di armonici). La sua funzione essenziale è tuttavia quella di generare il suono, essendo il grafico corrispondente solo sommariamente indicativo. Conviene tuttavia in taluni casi mostrare anche questo grafico, che è realizzato direttamente sulla base dell'onda sonora mentre va da sé che dalla carta stampata non può essere udito alcun suono. L'istruzione

```
Plot[Sin[2 Pi t], {t, 0, 1}]
```

traccerà dunque una funzione sinusoidale di frequenza pari a 1; e dunque inserendo un valore qualunque nella funzione, ad esempio, moltiplicando 2 Pi per 440 avremo, dal punto di vista di un suono sinusoidale possibile, 440 vibrazioni nell'unità di tempo. La formula per ottenere un suono di 440 Hz sarà data dunque da

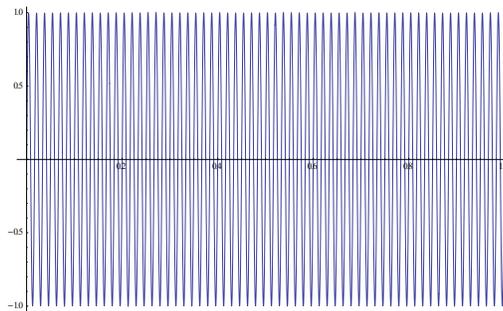
```
Sin[2 Pi 440 t], {t, 0, 1}
```

In forma generale:

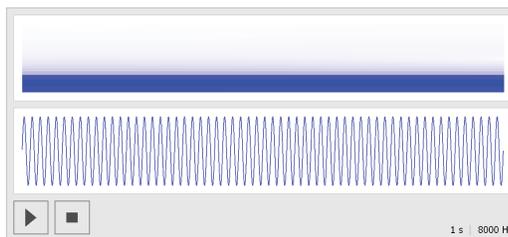
```
Sin[2 Pi freq t], {t, 0, 1}
```

Esempio per un suono di 60 Hz:

```
Plot[Sin[2 Pi 60 t], {t, 0, 1}]
```



```
Play[Sin[2 Pi 60 t], {t, 0, 1}]
```



2. Introduzione al tema dei flussi sonori

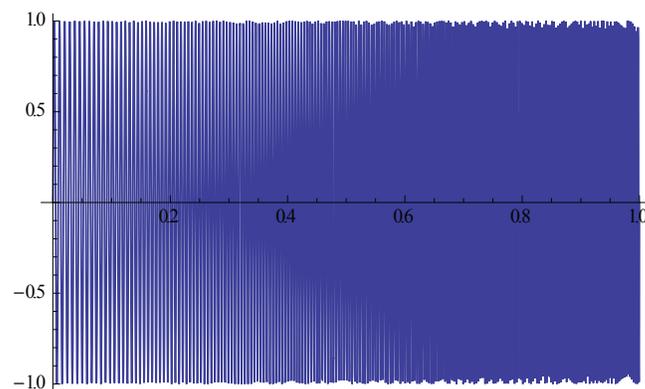
Il nostro modo di porre il problema della consonanza e della dissonanza credo che possa rivendicare una certa originalità soprattutto perché non si fa di esse una proprietà di raggruppamenti verticali di “note”. Queste nozioni vengono invece riferite allo spazio sonoro inteso come flusso continuo e unitario. Di conseguenza la mia esposizione dà una particolare importanza, anzitutto teorica, ai flussi sonori. Un flusso sonoro è naturalmente anche il suono a frequenza costante, ma merita questo nome solo perché esso ha una durata, e dunque non è fenomenologicamente puntiforme. Per avere un suono puntiforme basterà abbreviare la durata del suono in modo che il suono sia assimilabile ad un “punto” sonoro. In contesti in cui può nascere qualche equivoco si potrà usare una convenzione terminologica opportuna per contraddistinguere il flusso sonoro a frequenza costante dal flusso sonoro a frequenza variabile.

Per ottenere una frequenza variabile basterà inserire, al posto di un valore di frequenza fisso, una funzione che vari al variare di t tra 0 e 1.

Un esempio anche solo puramente grafico chiarirà questo punto. Si dia la funzione seguente:

```
funz1 =(220+(t*220));
```

```
Plot[Sin[2 Pi funz1 t],{t,0, 1}]
```

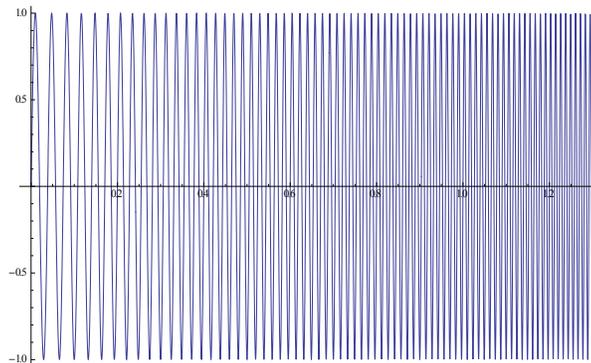


Con un numero così elevato di vibrazioni il plottaggio mostra a malapena la variazione di frequenza che diventa tuttavia visibile riducendo l'ambito delle frequenze ed eventualmente aumentando anche la durata. Ad esempio si ridefinisca *funz1* come segue:

```
funz1 =(25+(t*25));
```

Per valori così bassi il plottaggio mostra nettamente la variazione progressiva delle frequenze.

```
Plot[Sin[2 Pi funz1 t],{t,0, 1.3}]
```

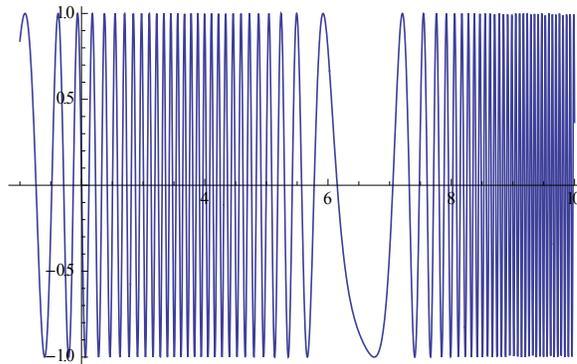


Va da sé che cambiando la funzione *funz1* possiamo ottenere a piacere suoni a frequenza variabile. Anche soltanto con i suoni sinusoidali si possono ottenere una grande varietà di strutture sonore. Per alcune funzioni può accadere che i valori forniscano frequenze troppo basse. Per ovviare a questo inconveniente si userà un moltiplicatore che chiameremo *molt*.

Consideriamo una funzione *funz1* meno ad hoc della precedente ed un poco più complessa. Sia ad esempio:

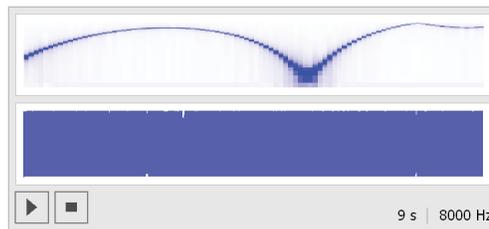
```
funz1 = Log[10, t]*5.5- Sin[t];
```

```
Plot[Sin [2 Pi funz1 t],{t,1,10}]
```



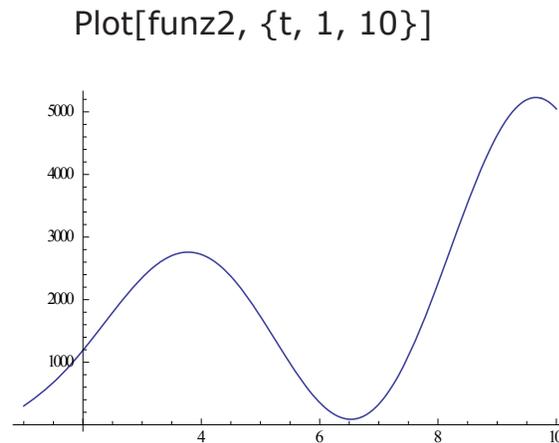
Se sostituiamo a *Plot* l'istruzione *Play* avremo frequenze troppo basse, ed un suono puntiforme o inavvertibile. Cosicché nell'istruzione *Play* ricorreremo ad un moltiplicatore pari a 300. Nota che per la determinazione di *molt* si procede per prove, sperimentando che cosa succede aumentando o diminuendo *molt*.

```
molt = 300;  
Play[Sin[2 Pi molt funz1 t],{t,1,10}]
```



Ci si chiederà ora quale sia l'andamento effettivo del flusso sonoro di questo esempio che si coglie approssimativamente nel riquadro superiore del grafico. Per avere una risposta risulta naturale realizzare il plottaggio della derivata di “molt funz1”, cosa che in *Mathematica* si ottiene con l'istruzione $D[f,x]$

```
funz2=D[molt funz1*t,t];
```



La funzione che abbiamo chiamato *funz2* ha per noi il significato di mostrare l'andamento della variazione di frequenza per una data funzione *funz1* con eventuale moltiplicatore una volta che *funz1* è stata inserita come “variante frequenziale” in una funzione sinusoidale. Notiamo in ogni caso che il ricorso alla derivata serve anche per determinare il valore in frequenza di un flusso all'istante dato. Ad es. per *funz1* definito in precedenza, potremo chiedere attraverso la sua derivata *funz2*, il valore della frequenza all'istante iniziale ($t=1$) o finale ($t=10$) o a qualunque altro istante intermedio.

```

funz2/.t→1
302.054
funz2 /.t→10
5047.01
funz2 /. t→9.5
5194.32

```

3. Dal grafico della funzione all'andamento del flusso sonoro

Con “andamento del flusso sonoro” intendo il tipo di movimento del flusso che è mostrato dal grafico della derivata della

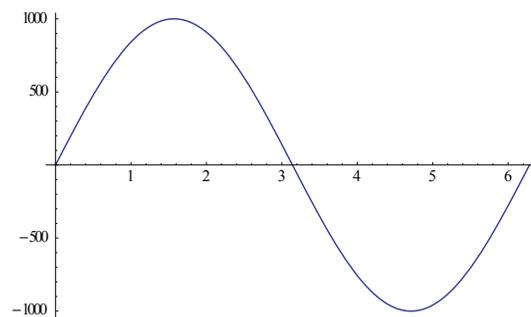
funzione di base. Ciò che abbiamo detto sin qui fa nascere infatti l'idea di poter “tradurre” il grafico di una qualunque funzione in un movimento sonoro che ha un andamento in certo senso analogo ad esso. La chiave per risolvere il problema è a portata di mano. Infatti sarà sufficiente “intendere” la funzione come se fosse una derivata di cui si deve individuare la funzione primitiva. Quindi si deve ricorrere ad un'operazione di integrazione. Anche in questo caso è sovente indispensabile l'impiego di un moltiplicatore. Esempi:

1.

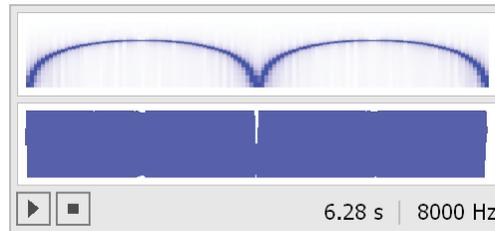
```
molt = 1000;
funz1 = Sin[t];
funz2=Integrate[molt funz1,t];
```

La forma della funzione che si vuole “tradurre” in suono sia questa volta la stessa forma sinusoidale. Di conseguenza, nell'istruzione *Play* si inserirà *funz2*, mentre *funz1* verrà intesa come derivata.

`Plot[molt funz1,{t, 0,2 Pi}]`

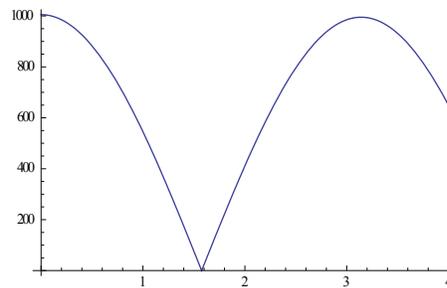


```
Play[Sin[2 Pi funz2], {t, 0, 2 Pi}]
```



Si noti che le frequenze vengono prese nei loro valori assoluti. Volendo tenerne conto nel plottaggio si può inserire questa condizione (usando l'istruzione *Abs*) ovvero:

```
Plot[Abs [molt funz1],{t, 0,2 Pi}]
```

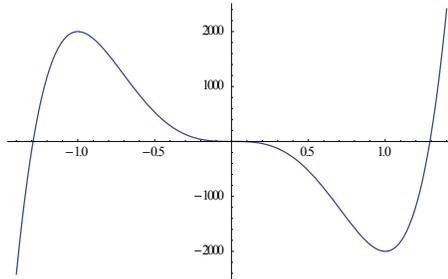


2.

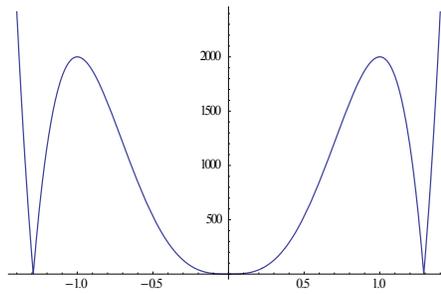
In questo secondo esempio si assume come *funz1* una funzione di quinto grado con moltiplicatore 1000.

```
molt = 1000;
funz1 = molt (-5 t^3 + 3 t^5);
funz2 = Integrate[funz1, t];
```

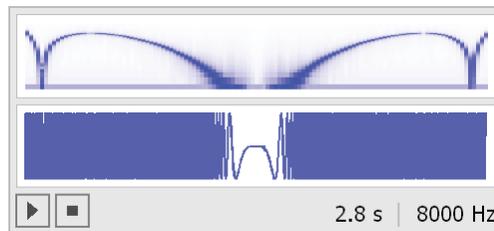
```
Plot[funz1, {t, -1.4, 1.4}]
```



```
Plot[Abs[funz1], {t, -1.4, 1.4}]
```



```
Play[Sin[2 Pi funz2], {t, -1.4, 1.4}]
```



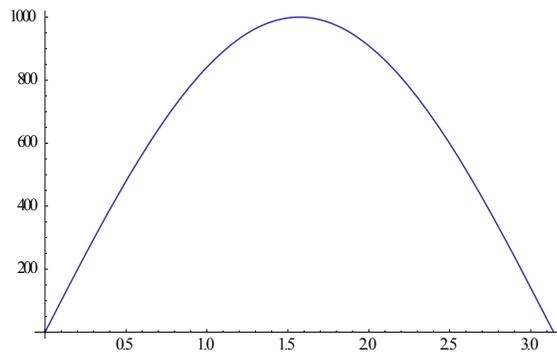
3.

```
molt = 1000;  
funz1 = molt Sin[t];
```

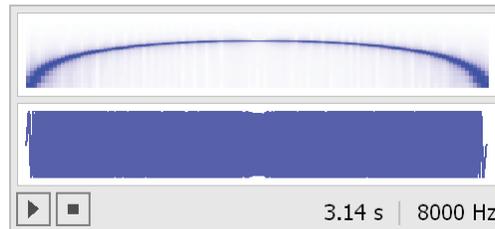
240

```
funz2 = Integrate[funz1, t];
```

```
Plot[funz1, {t, 0, 3.14}]
```



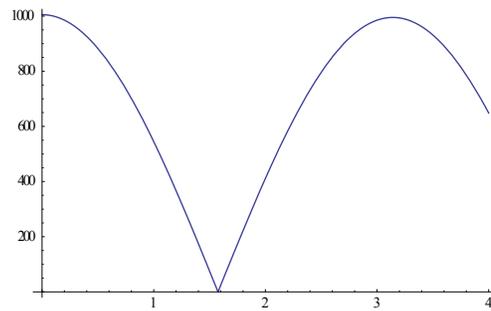
```
Play[Sin[2 Pi funz2],{t, 0, 3.14}]
```



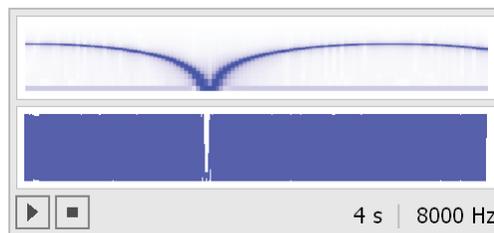
4.

```
molt = 1000;  
funz1 = molt Cos[t]+5;  
funz2 = Integrate[funz1, t];
```

```
Plot[Abs[funz1], {t, 0,4}]
```



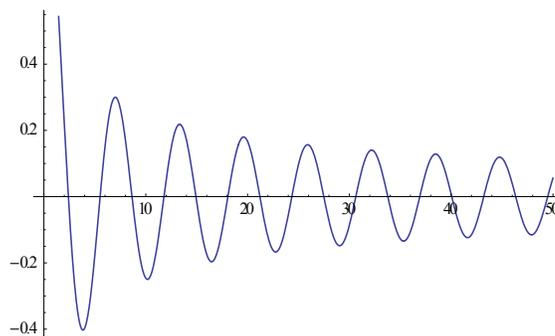
```
Play[Sin[2 Pi funz2], {t, 0,4}]
```



5.

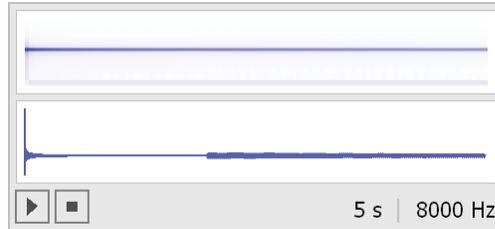
Il plottaggio della funzione di Bessel di prima specie presenta questa forma:

```
Plot[BesselJ[0,x],{x,0,50}]
```



Proponendo questa funzione in *Play* e con numero di frequenza fisso, otterremo un suono di ampiezza (intensità) decrescente.

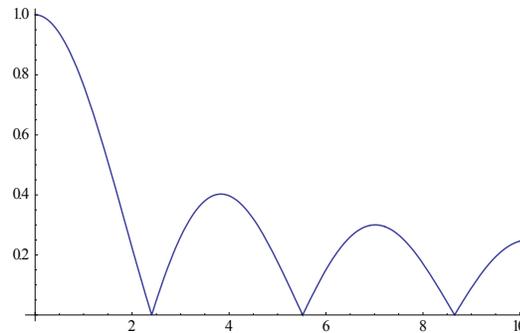
```
Play[BesselJ[0,2Pi440x],{x,0,5},PlayRange->{-0.09,0.09}]
```



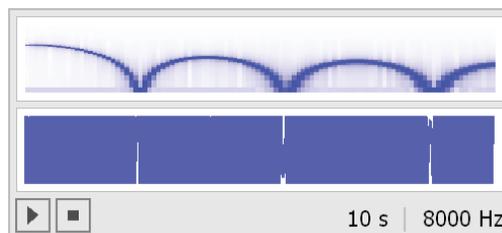
Assumendo la stessa funzione come *funz1*, e intendendola come derivata la cui integrazione è *funz2* otterremo, con *funz2* nell'istruzione *Play*, un flusso sonoro che ha la forma della funzione.

```
funz1 = BesselJ[0, t];
funz2 = Integrate[funz1, t];
```

```
Plot[Abs[funz1],{t, 0, 10}]
```



```
Play[Sin[2 Pi 1000 funz2],{t, 0, 10}]
```



4. Flussi sonori ascendenti e discendenti

In realtà, per quanto riguarda l'idea di "spazio sonoro" inteso come continuo dei suoni è sufficiente prendere in considerazione flussi ascendenti e discendenti, tenendo peraltro conto di un problema che fin qui abbiamo potuto rimandare ma che è particolarmente importante dal punto di vista musicale. Questo problema riguarda le strutture intervallari e in particolare le ottave in cui può essere suddiviso lo spazio sonoro. Mentre a livello fenomenologico vi è eguaglianza percettiva della grandezza degli intervalli di ottava, dal punto di vista fisico tali intervalli si distribuiscono secondo una progressione geometrica di ragione 2. Esemplicativamente se prendiamo il la a 440 Hz, l'ottava successiva sarà di $440 \times 2 = 880$, e quella ancora successiva $880 \times 2 = 1760$ ecc. È necessario allora non solo costruire flussi sonori ascendenti e discendenti, ma anche che essi siano tali da rendere il flusso equilibrato rispetto all'intervallo musicale, facendo variare in modo opportuno la struttura della progressione geometrica. In mancanza di questo equilibrio, il campo delle basse frequenze a disposizione sarebbe particolarmente esiguo mentre vi sarebbe un costante allargamento del campo delle frequenze man mano che ci si approssima alla regione acuta. In parole povere avremmo flussi sempre più lunghi nelle regioni delle alte frequenze e troppo brevi nelle basse frequenze.

Vogliamo procedere con ordine anzitutto riportando alla memoria alcuni presupposti elementari che riguardano le progressioni geometriche. Il presupposto più importante che ci interessa è il fatto che una progressione geometrica può essere concepita come generata dalla sua "ragione" elevata ad un esponente progressivo.

L'istruzione *Table* ci consente una semplice esemplificazione. Sia 2 la ragione della progressione che vogliamo costruire, la funzione da inserire in essa sarà appunto 2^t e l'istruzione verrà scritta come segue:

```
Table[2^t, {t, 0, 5}]
{1, 2, 4, 8, 16, 32}
```

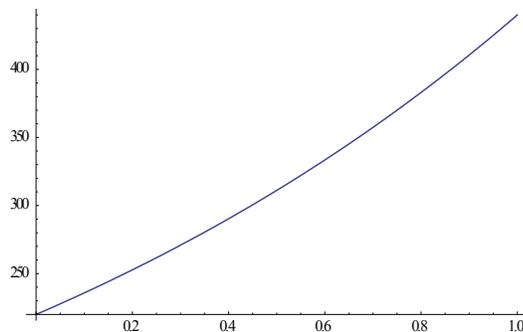
Volendo iniziare con un numero differente, ad es. 220, la funzione da inserire sarà appunto $(220 \cdot 2^t)$.

```
Table[220*2^t, {t, 0, 5}]
{220, 440, 880, 1760, 3520, 7040}
```

Essendo la forma generale della funzione sinusoidale $\text{Sin}[2 \text{Pi} f(t) * t]$ dove t verrà usato come iteratore nella istruzione *Play*, la regola per ottenere la variazione di frequenza sarà quella di ottenere una variazione di $f(t)$ secondo l'iteratore. Si potrà determinare la frequenza iniziale; e si dovrà determinare una ragione e il campo di variazione di t (t_{min} e t_{max} , quindi anche la durata del suono). Cosicché t potrà valere da un lato come variabile temporale, dall'altro, in $f(t)$, come esponente della ragione e quindi come la funzione che impone la variazione secondo una progressione geometrica della frequenza.

```
f = 220 2^t;
Table[f, {t, 0, 1}]
{220, 440}
```

```
Plot[f, {t, 0, 1}]
```

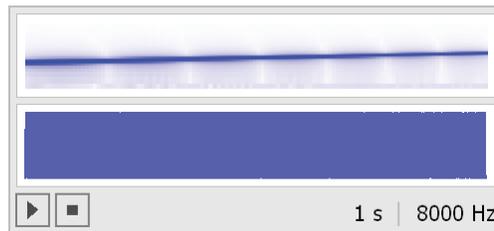


Naturalmente fin qui abbiamo solo a che fare con funzioni nu-

meriche. Ora la nostra intenzione sia quella di realizzare un flusso sonoro che abbia come frequenza iniziale = 220 e frequenza finale = 440 ed abbia forma ascendente e i valori frequenziali indicati nel plottaggio or ora effettuato. La via è in realtà già stata indicata in generale: la funzione in questione verrà intesa come se fosse una derivata di una primitiva da ricercare. Quindi:

```
molt = 220;
funz1= molt 2^t;
funz2 = Integrate[funz1,t];
```

```
Play[Sin[2 *Pi funz2], {t, 0, 1}]
```



```
funz1/.t→0
220
```

```
funz1/.t→1
440
```

È chiaro che vi è una regola che lega il contatore (=durata) alla ragione della progressione, una regola che ha conseguenze sulla frequenza finale. In linea generale, diminuendo la ragione si avrà per la stessa durata una frequenza finale minore, e aumentandola una frequenza finale maggiore. Analogamente diminuendo o aumentando la durata. Naturalmente noi siamo interessati a controllare questi elementi, in modo tale da ottenere flussi di cui si possa determinare preliminarmente frequenza iniziale, finale e durata. Ciò che ignoriamo è la ragione della progressione che ci fornisca flussi con quelle caratteristiche. Dobbiamo dunque risolvere un'equazione la cui incognita è appunto la ragione. Nel caso

246

precedente avendo scelto la durata di un secondo e una ragione 2 ottenevamo in effetti un flusso con inizio in 220 e fine in 440 Hz. Ma se vogliamo determinare *lo stesso flusso* facendolo durare 8 secondi dobbiamo determinare la ragione. L'equazione in questione sarà:

$$220 * x^8 == 440$$

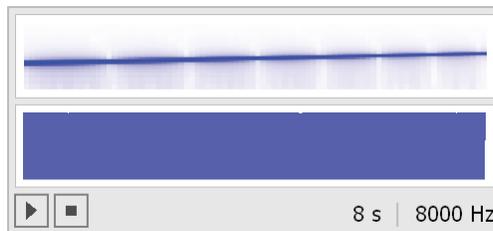
La soluzione (approssimata) dell'equazione andrà realizzata con *FindRoot*.

```
FindRoot[220*x^8 == 440, {x, 1}]  
{x→1.09051}
```

```
Table[220*1.09051^t, {t, 0, 8}]  
{220., 239.912, 261.627, 285.306, 311.13, 339.29, 369.999, 403.488, 440.007}
```

```
molt = 220;  
funz1 = molt 1.0905^t;  
funz2 = Integrate[funz1, t];
```

```
Play[Sin[2 *Pi funz2], {t, 0, 8}]
```



```
funz1/. t→0  
220
```

```
funz1/. t→8  
439.975
```

5. Procedure per la determinazione di flussi sonori ascendenti e discendenti

Come sintesi conclusiva di questa parte del problema possiamo proporre tre procedure.

A. Procedura per la determinazione della ragione (*rag*), dando come parametri la frequenza minima (*fmin*), quella massima (*fmax*) e la durata (*dur*).

```
DeterminaRag[fmin_,fqmax_, dur_] :=  
FindRoot[fmin*rag^dur == fqmax, {rag,1}];
```

È possibile porre in una variabile l'output di FindRoot come segue:

```
A = rag /.First[FindRoot[220*rag^10 == 440, {rag,1}]];
```

Questa possibilità è utilizzata nella procedura seguente e in quella successiva che realizzano rispettivamente un flusso ascendente e un flusso discendente cosicché la ragione viene calcolata all'interno della procedura. Nota che nel flusso ascendente si moltiplica la frequenza iniziale per la ragione, mentre per il flusso discendente viene divisa per la ragione la frequenza finale. Entrambe le procedure provvedono al plottaggio di *funz1* e alla produzione sonora corrispondente.

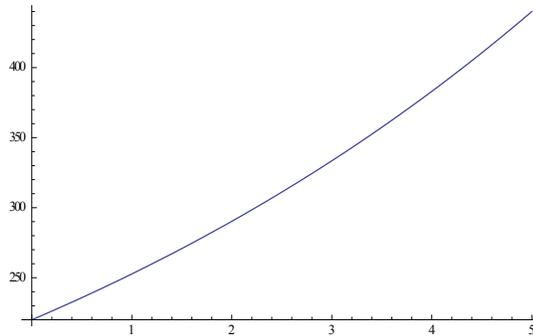
B. Flusso ascendente:

```
FlussoAsc[fmin_,fmax_,dur_] :=  
{  
  {R = rag /.First[FindRoot[fmin*rag^dur == fmax, {rag,1}]];  
  funz1 = fmin * R^t;  
  funz2 = Integrate[funz1,t];  
};  
{Plot[funz1, {t, 0, dur}]},
```

248

```
{Play[Sin[2 *Pi funz2], {t, 0, dur}, SampleRate->44100];}  
};
```

FlussoAsc[220, 440, 5]



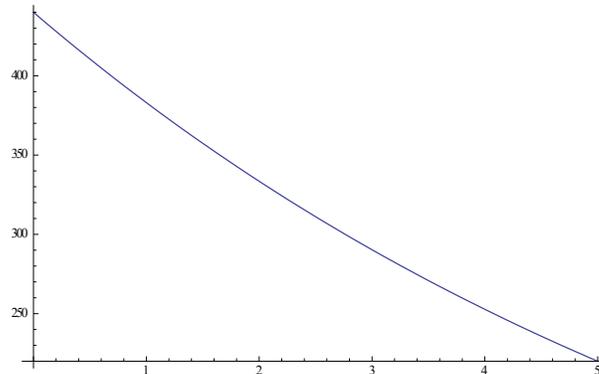
La ragione può essere richiesta anche fuori dalla procedura

R (* ovvero la ragione*)
1.1487

C. Flusso discendente:

```
FlussoDisc[fmax_,fmin_,dur_] :=  
{  
  {R = rag /.First[FindRoot[fmin*rag^dur == fmax, {rag,1}]]};  
  funz1 = fmax/R^t;  
  funz2 = Integrate[funz1,t];  
  };  
{Plot[funz1, {t, 0, dur}],  
{Play[Sin[2 *Pi funz2], {t, 0, dur},SampleRate->44100];}  
};
```

FlussoDisc[440,220,5]



Naturalmente per lo spazio sonoro come continuo dei suoni non ci limiteremo a considerare un'ottava, ma assumeremo l'intero campo dei suoni che possono avere una utilizzazione musicale - che viene di solito indicata tra 16 e 15000 Hz circa. La capacità uditiva può variare tra 16 e 20000 Hz. Nello stesso tempo va notato che l'ottava può essere considerata come rappresentativa dell'intero spazio sonoro.

6. Determinazione dell'intersezione dei flussi sonori

Considerando coppie di flussi che si intersecano può essere interessante determinare sia la frequenza sia l'istante in cui avviene l'intersezione. Ora per determinare la frequenza è necessario conoscere l'istante t dell'intersezione, che non è noto. La condizione conosciuta è ovviamente il fatto che la frequenza di una funzione nel punto di intersezione è eguale alla frequenza dell'altra cosicché la loro differenza è pari a 0.

Intanto, parlando di intersezioni di flussi sonori è utile unificare le due procedure precedenti in un'unica procedura che chiameremo *FlussoAscDisc*. Chiamiamo le due funzioni $funz1$ e $dunz1$ e rispettivamente $funz2$ e $dunz2$. Inoltre va relativizzato il *Plorange* alle variabili $fmin$ e $fmax$. L'istruzione *Play* può essere

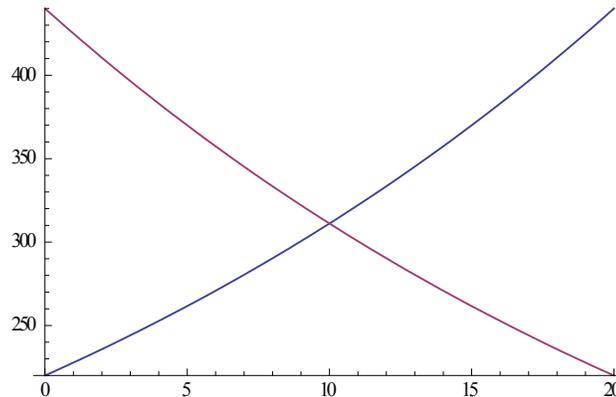
neutralizzato semplicemente mettendo un “;” al termine della procedura.

Flusso ascendente e discendente:

```
FlussoAscDisc[fmin_,fmax_,dmax_,dmin_,dur_] :=
{
  {R = rag /. First[FindRoot[fmin*rag^dur == fmax, {rag,1}]];
  funz1 = fmin * R^t;
  funz2 = Integrate[funz1,t];
  {
    dunn1= dmax/R^t;
    dunn2 = Integrate[dunn1,t];
    {Plot[{funz1,dunn1}, {t, 0, dur}, PlotRange->{fmin,d-
max}]}
    {Play[{Sin[2 *Pi funz2]+Sin[2 Pi dunn2]}, {t, 1, dur},
SampleRate->44100];}
  };
```

Esempio:

```
FlussoAscDisc[220, 440, 440, 220, 20]
```



Per trovare t basterà risolvere l'equazione che assegna il valore t nel punto dell'eguaglianza delle frequenze tra le due funzioni $funz1$ e $dunn1$. Tale equazione sarà ovviamente

$$funz1 - dunn1 == 0$$

Si userà *FindRoot*.

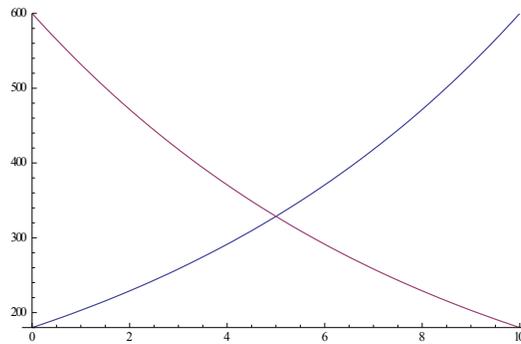
```
FindRoot[ funz1- dunn1== 0,{t,1}]/N
{t→10.}
```

Per avere la frequenza comune nel punto di intersezione si interrogherà come al solito *funz1* o *dunn1*, avendo trovato il valore di *t*.

```
funz1/.t→10 //N
311.127
dunn1 /.t→10 //N
311.127
```

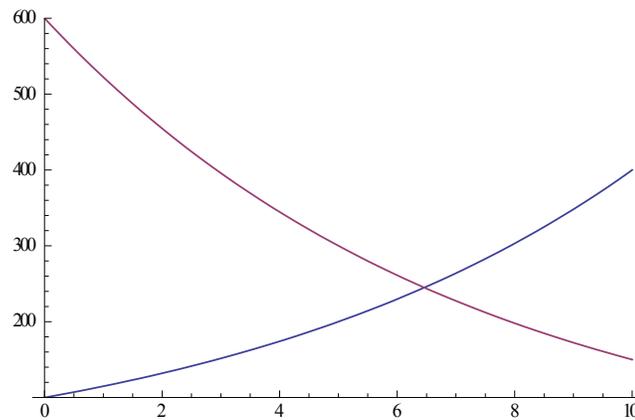
Altri esempi:

```
FlussoAscDisc[180, 600, 600, 180, 10]
```



```
FindRoot[ funz1-dunn1== 0,{t,1}]/N
{t→5.}
funz1/.t→5//N
328.634
dunn1 /.t→5 //N
328.634
```

FlussoAscDisc[100, 400, 600, 180, 10]



```
FindRoot[funz1- dunn1== 0,{t,1}]/N
{t→6.46241}
```

```
funz1/.t→6.46241//N
244.949
dunn1 /.t→6.46241 //N
244.949
```

Naturalmente le procedure descritte possono essere variate in vari modi, ad esempio è possibile aggiungere un suono costante oppure migliorare il grafico con linee verticali e orizzontali che contrassegnano le coordinate dei punti che ci interessano, ecc. In questo modo ho realizzato i grafici e gli esempi sonori presenti nei miei *Barlumi per una filosofia della musica* (2007) che comprendono una discussione dell'idea dello spazio sonoro come continuo di altezze (sez. VI), una trattazione dei flussi sonori (sez. VII), della consonanza e della dissonanza (sez. VIII), una discussione sulla nozione di sensibile (sez. IX) e sul tritono che viene normalmente inteso come dissonanza (sez. X), sviluppando e migliorando l'esposizione su questi temi nella *Filosofia della musica* (1991). Credo infine di dover aggiungere che indirettamente questi miei tentativi mostrano anche un nesso ben poco apprezzato dai fenomenologi tra fenomenologia e matematica e come la “descrizione fenomenologica” possa trarre profitto

non solo dalla “contemplazione” del fenomeno, ma dalla sua *costruzione*. Ed anche questa è, mi sembra, una novità significativa nell’ambito della pur molto ampia e variegata riflessione sulla metodologia fenomenologica.

Testi citati

Angelelli, 1984

I. Angelelli, *Frege und Abstraction*, in «Philosophia Naturalis», 21, 2-4.

Angelelli, 1991

I. Angelelli, *La abstraccion en la filosofia contemporanea*, in Actas de las XXV reuniones filosoficas de la Universidad de Navarra, Pamplona, 1991.

Angelelli, 1997

I. Angelelli, *The topics of the Frege-Husserl texts* in «Phenomenological Inquiry», 21, 1997, 29– 51.

Arnheim, 1950

R. Arnheim, *Il film come arte*, Il Saggiatore, Milano, 1960.

Bell, 1966

E. T. Bell, *I grandi matematici*, trad. it. di D. Aduni, Sansoni, Firenze, 1966.

Bollnow, 1980

O. F. Bollnow, *Mensch und Raum*, Stuttgart, 1980.

Boyer, 1995

C. B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1995.

Bozzi, 1990

P. Bozzi, *Fisica ingenua, Oscillazioni, piani inclinati e altre storie: studi di psicologia della percezione*, Garzanti, Milano, 1990.

Cajori, 1894

Cajori F., *History of Mathematics*, Mac Millan, New York, 1894.

Carnap, 1947

R. Carnap, *Meaning and necessity*, The University Chicago Press, Chicago, 1947.

Carnap, 1976

R. Carnap, *Significato e necessità*, trad. it. di A. Berra, La Nuova Italia, 1976.

Cellucci, 1995

Frege e le origini della logica matematica, in G. Frege, *Leggi fondamentali dell'aritmetica*, Teknos, Roma 1995, pp. IX-LXVI.

Cellucci, 2003

C. Cellucci, *Gottlob Frege: una rivoluzione nel campo della logica?* In: N. Vassallo (Ed.), *La filosofia di Gottlob Frege*, Franco Angeli, Milano 2003, pp. 41-58.

Cellucci, 2007

C. Cellucci, *La filosofia della matematica del novecento*, Laterza, Bari, 2007.

Centrone, 2010

S. Centrone, *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*, Springer, Dordrecht, 2010.

Da Silva, 2010

J. J. Da Silva, *Beyond Leibniz: Husserl's vindication of symbolic Knowledge*, in Hartimo, 2010, pp. 123 sgg.

Dedekind, 1872

R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Springer, Wiesbaden, 6a ed., 1933. La prima edizione è del 1872.

De Risi, 2007

V. De Risi, *Geometry and Monadology. Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space*, Basel, Birkhauser Verlag, 2007.

Diazzi, 2012

C. Diazzi, *Varietà e superfici: classificazione e cenni storici*. Tesi di laurea su relazione di Rita Fioresi, Università di Bologna, anno acc. 2011–2012.

Frege, 1986

G. Frege, *Scritti postumi*, ed. it. di Eva Picardi, Bibliopolis, Napoli 1986.

Frege 1884

Grundlagen der Arithmetik, Koebner, Breslau, 1884.

Frege, 1965

Logica e aritmetica, Scritti raccolti a cura di C. Mangione, trad. di L. Geymonat e C. Mangione, Torino, Boringhieri, 1965.

Frege, 1965a

G. Frege, *I fondamenti dell'aritmetica*, trad. it. di L. Geymonat e C. Mangione, in Frege, 1965.

Gario, 1979

P. Gario, *L'immagine geometrica del mondo. Storia dei poliedri*,

Stampatori Editore, Torino, 1979.

Gauss, 1876

C. F. Gauss, *Werke*, II, Göttingen, 1876. L'originale del testo *Theoria residuorum biquadraticorum* (II) è del 1831. L'*Anzeige* (comunicazione) si trova a pp. 169 sgg.

Gillies, 1999

D. Gillies, *German Philosophy of Mathematics from Gauss to Hilbert*, in *Revolution in Mathematics*, Clarendon Press, 1999.

Ghyka, 1977

M. Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, Dover, New York, 1977.

Giarratano, 1971

Platone, *Opere complete*, vol VI, trad. it. di C. Giarratano, Laterza, Bari, 1971

Hartimo, 2010

M. Hartimo (Ed.), *Phenomenology and Mathematics*, Springer, Dordrecht, 2010.

Husserl, 1970

E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, *Husserliana*, vol. vol. XII, a cura di L. Eley, Nijhoff, Den Haag, 1970. Le indicazioni di pagina delle citazioni sono relativa a questa edizione. Tuttavia nella traduzione italiana del testo si è fatto riferimento alla traduzione realizzata da G. Leghissa, Bompiani, Milano, 2001, nella quale sono in ogni caso riportate tra parentesi le indicazioni dell'edizione tedesca della *Husserliana*.

Ifrah, 1989

G. Ifrah, *Storia universale dei numeri*, trad. it. di G. Ernesti,

Mondadori, Milano, 1989.

Kenny, 2000

A. Kenny, *Frege. An Introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*, Blackwell, Oxford, 2000 (I ed. 1995).

Klein, 1933

F. Klein, *Elementarmathematik vom ein Höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1933. La prima edizione di quest'opera venne pubblicata nel 1908.

Kotrc, 1981

R. F. Kotrc, *The dodecahedron in Plato's Timaeus*, in «Rheinischen Museum für Philologie», 1981. Si trova all'indirizzo internet: <http://rhm.phil-fak.uni-koeln.de/start.html>.

Koyré, 1973

A. Koyré, *Introduzione a Platone*, trad. it. di L. Sichirollo, Vallecchi, Firenze, 1973.

Leibniz, 1963

Saggi filosofici e lettere, a cura di V. Mathieu, Torino, 1963.

Leibniz, 1875

Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz, hrsg. von C. J. Gerhardt, Berlin, 1875.

Leibniz, 1903

G. W. Leibniz, *Opuscles et fragments inédits*, a cura di L. Couturat, Alcan, Paris, 1903.

Leibniz, 1968

G. W. Leibniz, *Scritti di logica*, a cura di F. Barone, Zanichelli, Bologna, 1968.

Lobacevsky, 1965

N. I. Lobacevsky, *Nuovi principi della geometria*, trad. it. (parziale) con un saggio introduttivo e note di Lucio Lombardo–Radice, Boringhieri, Torino, 1965.

Mandelbrot, 1987

B. B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali - Forma, caso, dimensione*. Einaudi, Torino, 1987 (I ed. 1975).

Newton, 1965

I. Newton, *Principi Matematici della filosofia naturale*, a cura di A. Pala, UTET, Torino, 1965.

Odifreddi, 1992

P. Odifreddi, *Il teorema di Gödel e l'I.A.* http://www-scienzagiovane.unibo.it/intartificiale/odifreddi/godel_ia.html.

Peano, 1958

G. Peano, *Opere Scelte*, vol. II, Edizioni Cremonese, Roma, 1958.

Pedefferri, 2005

A. Pedefferri, *Frege e il neologicismo*, Franco Angeli, Milano, 2005.

Piana, 1967

G. Piana, *Elementi di una dottrina dell'esperienza*, in *Opere complete*, vol. I, Lulu.com, Internet, 2013 (I ed. Il Saggiatore, Milano, 1967).

Piana, 2013

G. Piana, *Strutturalismo e psicologia della forma*, in *Opere complete*, vol. II, Lulu.com, 2013.

Piana, 1973

G. Piana, *Interpretazione del Tractatus logico-philosophicus di Wit-*

tgenstein, in *Opere complete*, vol. XVI, Lulu.com, 2014.

Piana, 1990

G. Piana, *Interpretazione del «Mondo come volontà e rappresentazione» di Schopenhauer*, in *Opere complete*, vol. XIV, 1990, Lulu.com 2013.

Piana, 1991

Filosofia della musica, Guerini e Associati editore, 1991. Ora anche in *Opere Complete*, vol. VI, Lulu.com, 2013.

Piana, 1999

G. Piana, *Numero e figura. Idee per una epistemologia della ripetizione*, CUEM, Milano 1999. *Opere complete*, vol. XXV, Lulu.com, 2013.

Piana, 1988

G. Piana, *La notte dei lampi. Quattro saggi sulla filosofia dell'immaginazione*, Guerini e Associati, Milano, 1988. – Anche in *Opere complete*, vol. XXVI, Lulu.com, 1913.

Piana, 2007

G. Piana, *Barlumi per una filosofia della musica*, in *Opere complete*, vol. XXVII, Lulu.com, 2013.

Piana, 1913

G. Piana, *Commenti a Wittgenstein*, in *Opere complete*, vol. XVII, Lulu.com, 1913.

Piana, 2000

G. Piana, *La serie delle serie dodecafoniche e il triangolo di Sarngadeva*, Internet, «De Musica», IV, 2000. Ora anche in edizione cartacea in *Opere complete*, vol. XI, *Saggi di filosofia della musica*, Lulu.com, 2013, pp. 179 sgg.

Tutti gli scritti di G. Piana
 si trovano anche in formato PDF all'indirizzo
<http://www.filosofia.unimi.it/piana/>

Picker, 1963

B. Picker, *Die Bedeutung der Mathematik für die Philosophie Edmund Husserls*, in «Philosophia naturalis», Verlag Anton Hain, Meisenheim, 1962.

Poincaré, 1994

H. Poincaré, *Il valore della scienza*, a cura di G. Polizzi, La Nuova Italia, Firenze, 1994.

Ravasio, 2013

M. Ravasio, *Contare e calcolare. La filosofia dell'aritmetica di Husserl*. Tesi di laurea su relazione di Paolo Spinicci, Milano, 2013.

Richeson, 2008

D. S. Richeson, *The Euler's Gem. The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, Princeton, 2008.

Rivaud, 1985

Platon, Oeuvres Complètes, Tome X, trad. franc. di A. Rivaud, Les Belles Lettres, Paris, 1985.

Rota, 1991

G. Rota, *The pernicious influence of Mathematics upon Philosophy*, «Synthese» 88: 165-178, 1991.

Ruffino, 2005

M. Ruffino, *Perché Frege non sarebbe un neofregeano*, in Pedeferri, 2005, p. 215 sgg.

Russell, 1966

B. Russell, *La conoscenza del mondo esterno*, trad. di M. C. Ci-

prandi, Longanesi, Milano, 1966.

Spinicci, 1987

P. Spinicci, *Astrazione e riflessione nella Filosofia dell'aritmetica di Husserl*, in «Rivista di storia della filosofia», 3, 1987.

Szabò, 1978

A. Szabò, *The Beginnings of Greek Mathematics*, Reidel, Boston, 1978.

Taylor, 1928

A. E. Taylor, *A Commentary on Plato's Timaeus*, Clarendon Press, Oxford, 1928

Taylor, 1968

A. E. Taylor, *Platone. L'uomo e l'opera*, trad. it. M. Corsi, La Nuova Italia, Firenze, 1968

Reale, 1994

Platone, *Timeo*, trad. it. di G. Reale, Rusconi, Milano, 1994

Tieszen, 2005

R. Tieszen, *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, New York, 2005.

Vailati, 1972

G. Vailati, *Scritti filosofici*, a cura di G. Lanaro, Rossi, Napoli, 1972. Lo puoi trovare anche in www.liberliber.it.

Van Fraassen, 1992

B. van Fraassen, *An introduction to the Philosophy of Time and Space*, Springer, Dordrecht, 1992.

Waismann, 1967

F. Waismann, *Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Gespräche aufgezeichnet von F. Waismann, Suhrkamp, Frankfurt a. M., 1967.

Waismann, 1971

F. Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, trad. it. di L. Geymonat, Boringhieri, Torino, 1971 (ed. origin. Wien, 1936).

Whitehead, 1961

A. N. Whitehead *Introduzione alla matematica*, Sansoni, Firenze, 1961.

Wittgenstein, 1961

L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, trad. it. di A. G. Conte, Einaudi, Torino, 1961.

Wittgenstein, 1971

L. Wittgenstein, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, trad. it. di M. Trinchero, Einaudi, Torino, 1971.

Wittgenstein, 1967

L. Wittgenstein, *Ricerche Filosofiche*, trad. it. di M. Trinchero, Einaudi, Torino, 1967.

Wright, 1983

C. Wright, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen, 1983.

Zellini, 1980

Paolo Zellini, *Breve Storia dell'infinito*, Adelphi, Milano, 1980.

Giovanni Piana
Elenco cronologico degli scritti

1959

1 – Sul problema dell'intersoggettività

1960

2– Recensione a “La notion d’apriori” di Mikel Dufrenne

3 – Recensione a “Omaggio a Husserl” di Autori Vari

1962

4 – Husserl e la cultura cattolica

1965

5 – Esistenza e storia negli inediti di Husserl

6 – I problemi della fenomenologia

7 – Una critica sociologica a Marx

1966

8 – Un’analisi husserliana del colore

1968

9 – Introduzione alle Ricerche logiche di Husserl

10 – Note su “Storia e coscienza di classe”

11 – Sulla nozione di analogia strutturale in “Storia e coscienza di classe”

12 – Husserl, Schlick e Wittgenstein sulle cosiddette “proposizioni sintetiche a priori”

1972

13 – Commenti a Hume

1973

14 – Interpretazione del “Tractatus” di Wittgenstein

1975

15 – Commenti a Wittgenstein

1976

16 – Wittgenstein lettore di Frazer

1977

18 – La tematica husserliana dell'intero e della parte

1979

18 – Elementi di una dottrina dell'esperienza

264

1980

19 – Le regole dell’immaginazione

20 – Le regole dell’immaginazione e le procedure del lavoro onirico

21 – Sulla fantasticheria

1983

22 – Introduzione alla filosofia

1986

23 – Intorno alla filosofia della musica di Susanne Langer

1987

24 – A proposito dell’espressione “intelligenza artificiale”

25 – L’idea di qualità ghestaltica in von Ehrenfels

26 – Il tema dell’ineffabilità nella filosofia della musica di Jankélévitch

27 – Linguaggio, musica e mito in Lévi-Strauss

1988

28 – La notte dei lampi. Il lavoro del poeta. Saggio su Gaston Bachelard.

29 – La notte dei lampi. L’immaginazione sacra. Saggio su Ernst Cassirer

30 – La notte dei lampi. Colori e suoni

31 – La notte dei lampi. Riflessioni sul luogo

32 – L’esperienza della transizione e il sistema dei colori

33 – Fenomenologia e psicologia della forma

1989

34 – Il filo di Arianna. Nota su Husserl e Heidegger

1990

35 – Intervento sul libro “Fisica ingenua” di Paolo Bozzi

36 – Commenti a Schopenhauer. – I. Indicazioni di lettura per “La quadruplica radice del principio di ragione sufficiente”

37 – Commenti a Schopenhauer – II. Intuizione, intelletto, ragione

38 – Commenti a Schopenhauer – III. Volontà e natura

39 – Commenti a Schopenhauer – IV. Introduzione alla filosofia dell’arte

40 – Commenti a Schopenhauer – V. L’affermazione e la negazione della volontà di vivere

- 1991
41 – Immagini per Schopenhauer
- 1991
42 – Filosofia della musica
- 1992
43 – La fenomenologia come metodo filosofico
44 – Considerazioni inattuali su Theodor Wiesengrund Adorno
- 1993
45 – Una passeggiata sulla collina di Loreto
46 – Figurazione e movimento nella problematica musicale del continuo
- 1994
47 – Ripetizione, musica, magia. Conversazione su “La musica e la magia” di Jules Combarieu
48 – Fenomenologia dei materiali e campo delle decisioni
- 1995
49 – Mondrian e la musica
- 1996
50 – L’idea di uno strutturalismo fenomenologico
- 1997
51 – I compiti di una filosofia della musica brevemente esposti
52 – Elogio dell’immaginazione musicale
53 – Teoria del sogno e dramma musicale
- 1998
54 – Annotazione sull’origine e sull’impiego dei termini “modo” e “tono”
- 1999
55 – Numero e figura
56 – Il canto del merlo
- 2000
57 – La serie delle serie dodecafoniche e il triangolo di Sarngadeva
- 2002
58 – La composizione armonica del suono e la serie delle affinità tonali in Hindemith
- 59 – La scala universale dei suoni di Daniélou 2003
- 60 – L’intervallo

266

2004

61 – Il cromatismo

2005

62 – Alle origini della teoria della tonalità

2007

63 – Barlumi per una filosofia della musica

2009

64 – Un percorso attraverso una filosofia della musica

2010

65 – Album per la teoria greca della musica

2012

66 – Stralci di vita

2013

67 – La tematica dell'immaginazione in Kant (1976)

68 – Lineamenti di una filosofia dell'immaginazione (1988)

69 – Presentazione a «Fenomenologia, esistenzialismo, marxismo»

70 – Abbozzo per una periodizzazione dello sviluppo della classe operaia e del capitale a partire dal 1870

71 – Tragitti dell'immaginario. Note in margine a «L'acqua e i sogni» di Gaston Bachelard.

72 – Conversazioni sulla «Crisi delle scienze europee» di Husserl (2013)

73 – Fenomenologia delle sintesi passive (1988–2013)

2014

74 – «Storia e coscienza di classe»: Dal tempo della scrittura ai tempi della lettura

2015

75 – Frammenti epistemologici

Giovanni Piana

Elenco delle traduzioni

- G. Lukács, Scritti di sociologia della letteratura (Milano, 1964)
 H. M. Enzensberger, Questioni di dettaglio (Milano 1965)
 G. Lukács, Storia e coscienza di classe (Milano, 1967)
 E. Husserl, Ricerche logiche (Milano, 1968)
 E. Husserl, Storia critica delle idee (Milano, 1989)

Giovanni Piana

Elenco delle composizioni musicali

Le seguenti composizioni possono ascoltate e ritirate presso la sezione "Suoni" dell'Archivio di Giovanni Piana, Dipartimento di Filosofia, Università degli Studi di Milano.

1991

- 1 – Canzone a Yuko, per flauto basso e strumento a corda

2004

- 2 – Ninna Nanna, per soprano, violino e corno inglese
 3 – Leggenda per violino, violoncello, coro, timpani e archi
 4 – Omaggio a Corelli, per violino, tromba e organo

2005

- 5 – Trio per oboe, clarinetto e fagotto

2006

- 6 – Note stillanti, per pianoforte e vibrafono

2007

- 7 – Canzone antica per coro femminile, liuto, tamburello e ocarina africana

268

2008

8 – Preludiando alla notte, per qin e voci segrete

9 – Vagabondaggi della luna, per pianoforte e due viole

10 – Il grande canto, poema in quattro parti per voce recitante e insieme strumentale

11 – Geometrie per tromba e trombone

12 – Concerto per gong, cimbali, campane e campanelli cantanti con violino obbligato

13 – Dove a lor piacque per flauto, fagotto e pianoforte

2009

14 – Fantasia per sette strumenti (violino, viola, violoncello, clarinetto, fagotto, tromba, tuba)

15 – Tre bisticci giocosi per due oboi e due clarinetti

2010

16 – Le Chateau Noir, per violino, orchestra d'archi e sintetizzatore

2011

17 – Figurazioni per tromba e trombone

18 – Con umana dolcezza autunno mi consuma, per due flauti rinascimentali

19 – Quintetto per pianoforte, due violini e due violoncelli

2012

20 – Il fiore che restando passa, per coro a cappella

2015

21 – Serenata alla fanciulla dai capelli di lino, per violino, flauto, fagotto e pianoforte

Giovanni Piana
Opere complete

Edizioni a stampa reperibili presso Lulu.com

- Vol. I – Elementi di una dottrina dell'esperienza
- Vol. II – Strutturalismo fenomenologico e psicologia della forma.
- Vol. III – La notte dei lampi. Parte prima
- Vol. IV – La notte dei lampi. Parte seconda
- Vol. V – Le regole dell'immaginazione
- Vol. VI – Filosofia della musica
- Vol. VII – Intervallo e cromatismo nella teoria della musica
- Vol. VIII – Alle origini della teoria della tonalità
- Vol. IX – Teoria del sogno e dramma musicale. La metafisica della musica di Schopenhauer
- Vol. X – Mondrian e la musica
- Vol. XI – Saggi di filosofia della musica
- Vol. XII – Problemi di teoria e di estetica musicale
- Vol. XIII – Introduzione alla filosofia
- Vol. XIV – Interpretazione del "Mondo come volontà e rappresentazione" di Schopenhauer
- Vol. XV – Immagini per Schopenhauer
- Vol. XVI – Interpretazione del "Tractatus" di Wittgenstein
- Vol. XVII – Commenti a Wittgenstein
- Vol. XVIII – Commenti a Hume
- Vol. XIX – I problemi della fenomenologia
- Vol. XX – Fenomenologia, esistenzialismo, marxismo
- Vol. XXI – Saggi su Husserl e la fenomenologia
- Vol. XXII – Stralci di vita
- Vol. XXIII – Conversazioni sulla "Crisi delle scienze europee" di Husserl
- Vol. XXIV – Fenomenologia delle sintesi passive
- Vol. XXV – Numero e figura
- Vol. XXVI – Frammenti epistemologici
- Vol. XXVII – Barlumi per una filosofia della musica
- Vol. XXVIII – Album per la teoria greca della musica. Parte prima
- Vol. XXIX – Album per la teoria greca della musica. Parte seconda



Giovanni Piana
Opere Complete
Volume ventiseiesimo

In questi “frammenti” Giovanni Piana propone annotazioni brevi che rientrano nel campo delle problematiche epistemologiche. La forma del frammento non deve far pensare ad un’esposizione disorganica e disimpegnata, ma ad una forma che lascia all’autore un’ampia libertà di spaziare senza pedanteria su svariati argomenti — la natura dello spazio, il concetto di numero, geometria e mito, logica e linguaggio corrente, immaginazione e conoscenza, evidenza e rigore, intuizione e costruzione... — ed al lettore, che viene spesso richiesto di dire la sua, il gusto di una lettura che in realtà stimola ad un colloquio con il testo proponendo un pensiero in corso che egli stesso può proseguire. Anche nelle parti più impegnative e relativamente più organiche — come nella sezione intitolata *L’aritmetica prima dell’aritmetica*, dedicata a Husserl che tiene conto della recente rivalutazione della sua filosofia della matematica, oppure in quella intitolata *L’aritmetica senza l’astrazione* dedicata a Frege — questa scelta di stile non viene abbandonata. Ed attraverso di essa ci si renderà forse conto che in questi appunti, note prese in margine a letture estemporanee, citazioni, spunti non sviluppati di riflessioni, esempi, e persino gioiose ironie sfuggite di penna, si delinea un atteggiamento filosofico che ci dà da pensare.

Notizie su Giovanni Piana si possono trovare in Wikipedia
e nell’Archivio on line presso il Dipartimento di Filosofia
dell’Università degli Studi di Milano
(<http://www.filosofia.unimi.it/piana>)



5 800110 661673