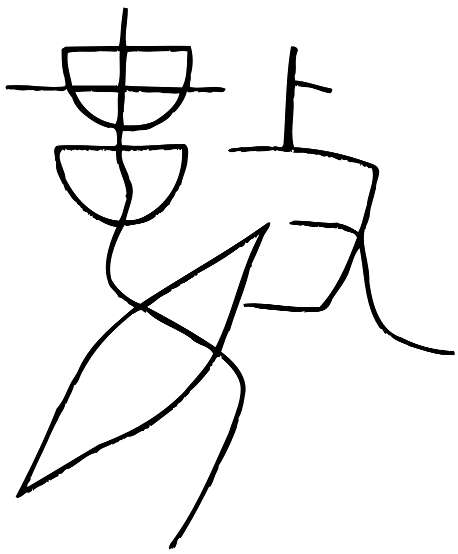
Giovanni Piana

NUMERO E FIGURA

Idee per un'epistemologia della ripetizione



azione + ripetizione = calcolo

1999

INDICE

PARTE PRIMA
SULLA COSTRUZIONE ITERATIVA DEL NUMERO

Parte prima

Sulla costruzione iterativa del numero

§1

Chiarimenti intorno al quadro teoretico-conoscitivo entro cui intendiamo muoverci – La vera filosofia tende all’elementare – La costituzione primaria dei concetti – Il riproporsi su questo terreno di antiche domande – Cenno sul tema dell’«intuizione» nella tradizione filosofica – La «crisi dell’intuizione» – I molti equivoci sull’argomento richiedono una riflessione critica.

Il percorso che vorremmo tracciare comincia dal problema del numero e prosegue poi in direzione di quello della «figura», della forma spaziale. Sullo sfondo, ma destinato ben presto a passare in primo piano, vi è il tema della ripetizione: la ripetizione ha una qualche funzione in rapporto al concetto di numero? Nella discussione intorno ad esso questo tema può o addirittura deve essere richiamato? Ed ancora: il richiamo alla ripetizione nel campo delle figure merita almeno di essere considerato interessante? Si tratta di domande che non verranno poste astrattamente, ma che si imporranno ben presto in forza dell’impostazione della nostra ricerca.

Vi sono infatti delle linee ben determinate entro le quali si muove la nostra indagine, e solo facendo riferimento ad esse diventa per noi possibile accingerci a questa ricerca, senza gettarci in modo scriteriato dentro una discussione che potrebbe apparire ora troppo complessa ed ora troppo vaga. È necessario invece che i nostri problemi siano ben delimitati. Ciò può accadere attraverso la determinazione degli interessi che ci guidano, dagli scopi che vorremmo perseguire, e persino dalle nostre prese di posizione filosofiche di ordine generale.

Certe domande non sorgerebbero nemmeno se non vi fosse un atteggiamento filosofico a partire dal quale ed in funzione del quale esse assumono il loro senso. Questo atteggiamento orienta poi naturalmente anche il modo in cui la discussione tenderà a svilupparsi.

Il quadro entro cui intendiamo muoverci rientra nel titolo di una teoria della conoscenza, inteso nel senso più ampio, e precisamente in un senso che non chiama in causa, da subito, la scienza e i suoi metodi, ma piuttosto il modo in cui concetti che sono per essa rilevanti cominciano ad essere primariamente forgiati nell'esperienza del mondo.

Da questo punto di vista numero e figura sono nozioni che hanno una portata esemplare proprio per il fatto che essi possono essere considerati come concetti-base dell'aritmetica e della geometria, cioè come *concetti che ne definiscono le rispettive regioni ontologiche*. Nello stesso tempo essi non compaiono belli e pronti all'interno di una sistematica teorica definita e chiusa che quelle regioni ontologiche dovrebbe rispecchiare.

Noi abbiamo un'esperienza del numero così come abbiamo un'esperienza della figura. La parola «esperienza» sembrerebbe inclinare verso atti puramente contemplativi ed osservativi, mentre secondo le nostre intenzioni essa ha piuttosto il senso di un molteplice aver-a-che-fare, nel quale numeri e figure sono messi-in-pratica. A sua volta questa pratica non va intesa come una più o meno rozza applicazione di quei frammenti di teoria che si sono imparati a scuola fin dalla più tenera infanzia. Si tratta piuttosto del fatto che il problema del numero sorge, come problema concettuale, per il fatto stesso che vi sono intorno a noi delle molteplicità; e quello della figura o della forma per il fatto stesso che vi è uno spazio articolato, che può essere variamente suddiviso, modificato, trasformato. L'interesse pratico-empirico precede l'interesse teorico, lo anticipa e lo prepara. Quando poi questo interesse arriva a bastare a se stesso, ha inizio il cammino della teoria – un cammino vertiginoso, non solo per le altezze che riesce a raggiungere, ma anche perché sa sopportare le vertigini di un sentiero che, sempre più salendo, si libera progressivamente da ogni protezione procedendo in bilico sul vuoto, forse persino creando da se stesso il terreno per il prossimo passo. Aritmetica e geometria sono una splendida illustrazione di un simile cammino.

Ci si può chiedere allora che interesse potrebbe avere il rammentare i primi inizi. In realtà potremmo fare semplicemente a meno di questi ricordi – l'oblio non recherebbe certamente dànno alle conoscenze ormai solidamente acquisite. Si tratta del resto di ricordi che pur riguardando certi dati di fatto che sono attinenti ai concetti, sembra si trovino in realtà all'esterno del loro statuto logico autentico, e non siano dunque in grado di insegnarci nulla in rapporto ad esso: dati di fatto storici o addirittura preistorici che potrebbero interessare l'antropologo, ed eventualmente richiamare l'attenzione dello psicologo o del pedagogista potendo essere ricollegati al modo in cui i concetti si formano nella nostra mente. Qualcuno potrebbe sostenere che chi ha di mira l'acquisizione di chiarimenti nel quadro dei problemi di una teoria della conoscenza, e che è perciò interessato proprio allo statuto logico-concettuale, dovrebbe volgere lo sguardo interamente altrove, orientando la propria riflessione sul piano evoluto della teoria: dovrebbe dunque avventurarsi su quel sentiero piuttosto che esitare presso quei primi inizi.

Eppure, per quanti stimoli la riflessione epistemologica possa ricevere dalla considerazione delle elaborazioni teoretiche evolute, dalla riflessione sulle strutture definitorie e sulle connessioni e relazioni istituite nel presupposto di un'unità teorica compiuta, tanto più questi stimoli potranno essere fecondi se si ribadisce quella che è forse la vocazione più profonda della filosofia, che è in realtà assai diversa da quella dell'indagine scientifica. È mera retorica non voler prendere atto di questa diversità, benché l'una e l'altra si trovino all'interno di un orizzonte comune.

La vera filosofia tende all'elementare. E dunque non ha fretta di correre oltre, indugia in quei punti rispetto ai quali si potrebbe benissimo soprassedere. In certo senso si fa custode del ricordo di cose che si potrebbero facilmente dimenticare.

Il riferimento alle situazioni iniziali, all'interesse filosofico *specifico* che questo riferimento può rivestire, si situa in questo contesto. In realtà si tratta di un interesse che propone, secondo una particolare angolatura, questioni che non solo non sono estranee ad un'epistemologia autentica, ma appartengono anzi al suo nucleo più interno. Qui si rinnovano infatti antiche domande: esse riguardano intelletto e sensazione, astrazione e concretezza, logica ed empiria. L'angolatura particolare sta nel fatto che le domande proposte intorno a questi grandi titoli oppositivi vengono riformulate nei termini di una «genealogia fenomenologica», cioè nei termini di una riflessione sulla *costituzione primaria dei concetti*. In questa riflessione vengono considerati certi *fatti* solo in quanto implicano e suggeriscono una *trama teorica*, e naturalmente verso di essa è puntata tutta la nostra attenzione. Questo è il modo in cui si può realizzare una vera e propria *analisi della costituzione interna del concetto*. La parola *costituzione* ha una duplice e interessante inclinazione di senso, statica e dinamica ad un tempo: da un lato indica l'intelaiatura fondamentale che sostiene una costruzione, i suoi nodi, il suo scheletro; dall'altro il modo in cui una simile intelaiatura è stata processualmente ottenuta, si è andata via via formando in un processo.

Alla base delle considerazioni che seguono vi è la convinzione che l'intelaiatura interna possa essere esibita dal processo costitutivo – o per dir meglio: dal *pensiero* di un *possibile* processo costitutivo, evitando così l'equivoco richiamo ad una «storia» in senso empirico-concreto. Una simile formulazione suggerisce tra l'altro, molto opportunamente, l'idea che i processi costitutivi possano essere più d'uno: è infatti lecito ritenere che una nozione possa essere essere illuminata da diversi lati e che presenti caratteri che possano essere meglio illustrati seguendo itinerari differenti.

Parlando di tendenza all'elementare, ed in rapporto ad essa, di una «genealogia fenomenologica», si allude ad un altro problema, che ha una lunga tradizione dietro le proprie spalle. La riflessione filosofica ha spesso rivendicato, all'interno di diverse prospettive teoriche e talora con significati ed intenti profondamente diversi, la necessità che le operazioni intellettuali ed i loro prodotti, che hanno la loro sedimentazione nel linguaggio, fossero di continuo messi alla prova nel loro *senso*, nella loro *portata effettiva* e nella specificità del loro *contenuto*. Ed ha spesso avanzato il dubbio che la via dell'astrazione non possa pretendere di trovare ogni garanzia in se stessa, ma che fosse invece un compito privilegiato della teoria della conoscenza rammentare ed elaborare il nesso, per dirla in breve, tra «concetti» e «intuizioni».

È opportuno sottolineare che non si tratta affatto di un'istanza che cresce dentro atteggiamenti filosofici in via di principio ostili alla logica o alla scienza. Al contrario essa si fa sentire con particolare pregnanza proprio all'interno delle grandi filosofie razionaliste, come quella di Cartesio o di Leibniz. Nella tradizione empiristica, naturalmente, il nesso tende a diventare opposizione – e nella storia complessa del problema trovano spazio anche tendenze in cui l'opposizione diventa una esasperata *contrapposizione*.

La parola stessa di «intuizione», il cui senso peraltro non è mai stato univoco, assume valenze di significato che sembrano non poter essere rese esplicite se non in modo meramente negativo: l'intuitivo come l'alogico, l'arazionale. Come se si trattasse ancora di un conoscere, ma per un'*altra* via. In questa modificazione di senso ci troviamo certamente lontani dalla tradizione razionalistica, ma anche da quella empiristica, nella quale il richiamo alla priorità delle *impressions* sulle *ideas* aveva comunque un senso ed una portata analitica, ed assolveva dunque un importante compito critico-conoscitivo: l'idea viene illustrata e chiarita attraverso l'esibizione delle sue origini «impressionali». Oppure essa viene dimostrata come puro *flatus vocis*, mera costruzione linguistica senza contenuto, quando questa esibizione non risulta possibile. Se ponessimo l'accento sulla contrapposizione ci troveremmo altrettanto lontani dalla concezione kantiana dell'integrazione necessaria tra il piano intellettuale e quello intuititivo – parole che del resto in un contesto trascendentalistico ricevono a loro volta un senso interamente nuovo. Con la nozione di intuizione pura ed a priori, nell'accezione kantiana del termine, ciò che viene intuitivamente colto assume una nuova dignità, in quanto deve appartenere alla forma stessa del reale.

Si potrebbe tuttavia osservare che tutte queste diverse possibilità di intendere il termine e la problematica corrispondente sono di fatto confluite insieme e, ad un tempo, superate e soppresse da quella «crisi dell'intuizione» il cui risultato dovrebbe essere ritenuto del tutto acquisito. In questa crisi non deve forse anche essere travolta l'idea stessa della necessità di un'indagine volta in direzione dei rapporti tra concetti e processi dell'esperienza e la sua appartenenza di diritto al campo degli interessi epistemologici?

Secondo una semplice schematizzazione che è stata per lungo tempo in auge, e forse lo è ancora, la domanda «filosofica» – ma di una filosofia che sarebbe digiuna dello sviluppo della scienza – pone l'istanza dell'«intuizione», laddove la scienza, ed una filosofia che si attenga ad essa come propria stella polare, ha già relegata questa istanza tra le anticaglie del passato. A titolo di esempio: la consistenza delle geometrie «non euclidee» e nello stesso tempo il loro carattere «contro-intuitivo» sembrano avere il valore di dati di fatto che stanno in luogo di mille discettazioni. L'antico concetto dell'*assioma*, e la cogenza razionale ad esso associato, si mostra ora in tutta la sua decrepitezza e consunzione. Persino autorevoli «leggi logiche» – si pensi al rapporto intero-parte – hanno perduta tutta la loro autorevolezza in un giorno solo, esattamente nel giorno in cui si ebbe l'idea di contare tutti i numeri pari scoprendo che essi erano tanti quanti i numeri pari e dispari insieme. Il vecchio neopositivismo fece di tutto ciò una sorta di bandiera – e la nuova logica sembrò trovare nell'idea della *definizione implicita*, strettamente solidale con questa «crisi dell'intuizione», la risposta effettiva alla domanda filosofica sull'essenza.

Ad esempio: se si chiede «Che cosa è il numero?» si risponderà non già dicendo o tentando di dire la cosa, ma indicando un insieme di condizioni (gli «assiomi» appunto in quanto «assunzioni», e non in quanto «evidenze») che la cosa deve soddisfare per essere chiamata numero. L'ente resta «concettualmente» indeterminato – mentre esattamente determinate sono le condizioni del suo comportamento. «Concettualmente» significa qui «psicologicamente», «mentalmente», o qualcosa di analogo. Infatti anche la terminologia del concetto diventa decrepita. A quanto sembra non sappiamo più attribuire a quel termine altro senso che quello di «contenuto mentale» – e allora dei concetti se ne occupi lo psicologo, se ritiene di doverlo fare; oppure l'antropologo se è interessato alle pratiche con i numeri, alle usanze aritmetiche di questa o quella tribù.

La definizione implicita ci consente da subito di navigare nelle acque alte del pensiero astratto, non ci obbliga a fare i conti con il vero e con il falso, distingue nettamente tra costruzione teorica e applicazione, non ci impegna né sulla natura del concetto né su quella della realtà. Essa dunque ci libera da molti problemi, ed ha molti vantaggi.

Eppure basta un nonnulla – una sua ripresa senza che sia accompagnata da una necessaria riflessione critica, una stanca ripetizione da manuale, il presentare le cose come se si trattasse di una straordinaria scoperta piuttosto che di una possibilità interessante – perché essa, considerata dal punto di vista epistemologico, non sia altro che un modo di soprassedere, di alzare le spalle, di «dimenticare»: una vera e propria dissennata apologia della cecità. La quale è peraltro molto spesso – e per fortuna – una finzione ad uso dei profani. Ciò che si dice di non pensare più, lo si è già pensato prima. Questo pensiero anteriore, che precede gli scarabocchi dei simbolismi, viene chiamato in causa dalle nostre considerazioni precedenti e dai dubbi in esse formulati: una riflessione filosofica epistemologicamente orientata può avere il senso di una pausa nel cammino sempre avanti su quel vertiginoso sentiero, una sorta di temporaneo ritorno a terra dal mare alto, sulla spiaggia, dove potremo in piena tranquillità, forse giocherellando con i sassolini tra i nostri piedi, tentare di mettere un poco di ordine nei nostri pensieri.

§ 2

Prime considerazioni sugli impieghi comuni della parola «numero», «numeroso», ecc. – La semantica oppositiva nel discorso corrente – I modelli percettivi che fanno da sostegno alle espressioni linguistiche – Molti e pochi – Molteplicità e pluralità – Pluralità e singolarità.

Per cominciare a delineare i termini di un problema e introdurre la discussione, entrando al tempo stesso speditamente nel bel mezzo delle cose, non vi è forse metodo migliore che quello di proporre una riflessione sugli impieghi di termini in qualche modo attinenti ad esso nel linguaggio corrente.

Questo abbiamo appreso soprattutto da Wittgenstein e dalla filosofia analitica del linguaggio – anche se occorre evitare l'errore di elaborare una generica rassegna o un elenco di termini scelti a casaccio. Un obbiettivo di ricerca deve essere sottinteso e debbono esservi intenzioni filosofiche in grado di offrire dei criteri di selezione: perciò ci preoccuperemo subito di mettere in risalto tra ciò che ci può sembrare significativo dal punto di vista teorico, trascurando invece ciò che non sembra poterci insegnare qualcosa. Dunque, nessuna semplice presa d'atto degli impieghi ordinari: e nessuna illusione di trovare in essi un riferimento che dovrebbe avere poi un significato *normativo* per risolvere i nostri dubbi nella filosofia.

Il riferimento agli impieghi linguistici correnti *ha piuttosto il senso di un dissodamento preliminare del problema, di una sorta di elucidazione dei suoi termini iniziali*. Se poi potremo di qui trarre qualche suggerimento interessante dal punto di vista teorico, cercheremo di farne un buon uso.

Vi è anche un motivo di provenienza fenomenologica che ci suggerisce un simile punto di avvio: almeno *talvolta*, il linguaggio corrente è fortemente refrattario ad adottare moduli linguistici che si distacchino troppo nettamente dall'*esperienza* che noi abbiamo del reale.

In particolare è una caratteristica del linguaggio nei suoi impieghi correnti quella di tenersi abbastanza fortemente abbarbicato ad una *semantica oppositiva*, che *appare appropriata ad una condizione in cui la concettualità è ancora fortemente intrisa di componenti percettive e immaginative.* Nell'esperienza percettiva le determinazioni delle cose non hanno il senso di mere determinazioni oggettive a sé stanti, ma entrano in relazione tra loro secondo rapporti di somiglianza e di contrasto. Nell'istituzione di queste connessioni hanno naturalmente particolare importanza le componenti immaginative e associative che sono sempre presenti nel campo della percezione.

A sua volta il linguaggio corrente sottintende spesso una delimitazione oppositiva del senso dei termini. Conseguentemente potremmo sostenere che uno dei primi passi che caratterizzano il pensare astratto e ne annunciano la presenza è proprio quello che consiste nel superamento di un simile modo di determinare il significato dei termini opponendoli l'uno all'altro. Si comincia così a superare i legami che per questa via si mantengono con il piano empirico concreto. Le opposizioni si riducono a semplici casi particolari subordinati ad un unico titolo generale. Questo aspetto può essere illustrato con esempi che ci consentono anche di dare l'avvio alla discussione del nostro argomento.

Nel linguaggio corrente vi è l'aggettivo «numeroso» che si applica quando siamo alla presenza di «molte» cose.

Il «molto» va tuttavia qui inteso *in opposizione* al «poco», e ciò significa che l'aggettivo *numeroso* non allude ad una molteplicità *qualunque*, ma ad una *molteplicità rilevante*.

Di un pubblico che partecipa ad una conferenza o ad una lezione universitaria non diremmo che è numeroso, se esso è rappresentato da due o tre persone. Potremmo dire che al senso delle parole «molto» e «poco» fanno da sostegno *modelli percettivi* nettamente diversi.

È opportuno richiamare l'attenzione sul fatto che vi sono o possono esservi dei modelli percettivi che fanno da sostegno al senso delle parole – si tratta di una circostanza per noi particolarmente interessante che viene spesso ignorata o addirittura capovolta, quasi che l'esperienza stessa fosse un risultato dell'uso linguistico e non vi fosse invece, tra l'uno e l'altro piano, una complessa interazione, secondo intrecci molto vari.

Il modello percettivo, a sua volta, contiene rimandi associativi-immaginativi. Ad esempio, in luogo di pubblico *numeroso* si potrebbe parlare di un *folto* pubblico, aggettivo che è particolarmente pertinente per gli alberi di una foresta. Se dico «numeroso», nelle valenze di senso della parola vi è anche il «folto»: il *modello percettivo* eventuale, cioè *l'esempio che può essere mostrato come illustrazione adeguata del senso*, esibisce così al tempo stesso anche un'inclinazione immaginativa, contiene «associazioni» che sono in realtà importanti per la sua delimitazione e per la sua comprensione.

Tuttavia il «molto» non ha solo il senso che gli deriva dall'essere contrapposto al poco. Esso può talora essere considerato connesso all'idea espressa dall'impiego della paroletta «più» in esempi come: «Vi sono più persone in questa stanza». In esempi come questi il «più» indica propriamente che in questa stanza non vi è *una sola persona*, ma ve ne sono appunto *più d'una*. La «molteplicità» scivola verso la «pluralità». Vi è dunque un'equivocità che conviene fin dall'inizio mettere in rilievo: con *molteplicità* di oggetti potremmo anche intendere una *pluralità*, avendo di mira piuttosto che l'opposizione tra il molto e il poco, quella tra pluralità e singolarità. Al molto si contrappone allora la *cosa singola*.

Vogliamo ancora sottolineare che si tratta di una opposizione autentica. Forse si potrebbe pensare di indebolirne la forza, parlando ad esempio di una *molteplicità che è costituita da un solo oggetto*, ed in questa formulazione ci libereremmo di una caratterizzazione oppositiva, pur mantenendo la differenza tra l'idea di molteplicità e quella di oggetto singolo. È facile tuttavia rendersi conto che quella formulazione ha come condizione di possibilità che si sia già compiuto più di un passo sul piano dell'astrazione.

Il tema dei modelli percettivi ci può servire qui da vero e proprio criterio distintivo. Infatti mentre posso esibire un modello percettivo per l'oggetto singolo o per la pluralità, non potrei poi mostrare nuovamente un oggetto singolo per illustrare l'idea di «molteplicità costituita di un solo oggetto»: per questa idea *non vi è propriamente nessun modello percettivo*. In essa infatti la singolarità è «pensata» attraverso il pensiero della molteplicità (pluralità) e questo pensiero non è contenuto nel dato esibito.

Il rimando al modello percettivo ci consente dunque di distinguere nettamente tra un impiego del termine di «molteplicità» che ha un modello percettivo attraverso il quale può essere illustrato il suo senso ed un impiego dello stesso termine per il quale questa possibilità illustrativa non sussiste. Ciò significa forse che quest'ultimo è illegittimo? Certamente no. Non si vede infatti quale passaggio ci possa condurre dalla posizione di una simile distinzione all'assunzione dell'esistenza di un modello percettivo come canone di una legittimazione.

§ 3

Il numero come risposta alla domanda "Quanti?" – La nozione di numero intesa come numero-di-oggetti – Numero e molteplicità – Il numero come oggettività a sé stante – Riduzionismo empiristico e ontolgismo platonizzante – Critica di questa alternativa attraverso l'idea delle differenze nella modalità dell'intendere.

In presenza di una molteplicità di oggetti, si può porre la domanda: «Quanti?», ed a questa domanda si risponde con un numero. Il termine di «quantità» appartiene certo alla stessa famiglia di «molteplicità», «pluralità» e «numerosità», ma ha una sfumatura di senso che si richiama alla determinatezza. Se alla domanda «Quanti?» si risponde ancora con «molti» o «più di uno» certamente chi rivolge la domanda ha il diritto di riproporla. La molteplicità può in via di principio essere determinata, ed il numero opera appunto questa determinazione.

Secondo queste prime considerazioni dunque il numero si prospetta come vincolato ad una nozione di molteplicità essenzialmente intesa come pluralità, come una sorta di «proprietà» o di «attributo» della molteplicità: un numero andrà infatti attribuito ad una molteplicità ovvero questa potrà essere caratterizzata e contraddistinta da altre mediante un numero. Potremmo dire che il numero è qui essenzialmente «*numero-di...*» e precisamente *numero-di-oggetti.*

Espressioni come proprietà o di attributo sono tuttavia in questo contesto largamente equivoche: come abbiamo notato fin dall'inizio, i nostri richiami a possibili impieghi correnti non ci fanno per nulla dimenticare che essi si trovano sul percorso di una ricerca filosofica ai suoi inizi. Essi non ci interessano in se stessi, ma per le riflessioni che possono suggerire. In questo caso si deve rilevare un'importante differenza che può essere nascosta dall'uso *generico* del termine di *proprietà* e di *attributo*. In realtà «attribuire» un numero ad una molteplicità ha implicazioni differenti dall'«attribuire» un colore a cose come un fiore o un frutto. Anzitutto una molteplicità non è una «cosa», benché possa essere composta di cose. In rapporto alle cose infatti l'attribuzione non è senz'altro sensata, ma vi sono determinate condizioni che debbono essere soddisfatte affinché essa possa aver luogo. Ad un suono non può essere attribuito il colore giallo – anche se l'espressione di «suono giallo» può avere un senso e una portata dal punto di vista immaginativo.

A sua volta la formazione di una molteplicità concreta esige che siano soddisfatte delle condizioni relative agli oggetti di cui essa è composta: le mele e le coordinate cartesiane non possono essere poste nello stesso canestro. Tuttavia la nozione di molteplicità che si va istituendo *a partire* dalla molteplicità concreta non è affatto vincolata a questa concretezza, e in particolare non lo è quando si pone il problema del numero. L'attribuzione di un numero ad una molteplicità non richiede che sia soddisfatta qualche condizione in rapporto alla «natura» degli oggetti di cui essa è costituita. Un suono, il colore giallo, l'ascissa e l'ordinata formano una molteplicità esattamente come le mele in un canestro, e su di essa potrà porre la domanda intorno alla quantità.

Un'attenzione particolare merita poi la paroletta «di» che aggiungiamo all'espressione «numero»: *Numero-di...* – e in particolare *numero-di-oggetti*.

Questa formula intende segnalare la differenza tra una nozione di numero che è vincolata in via di principio a quella di molteplicità (e degli oggetti che appartengono ad essa) e una nozione di numero come *entità o oggettività essa stessa autonoma.*

Grande problema! Certamente. Ma esso può essere affrontato con i nostri mezzi minimi. Proviamo infatti ad attenerci il più possibile al terreno che abbiamo scelto, in cui vi sono domande e risposte quotidiane. A chi ci chiedesse che cosa sia mai il numero come entità in se stessa autonoma, il numero *sic et simpliciter*, risponderemmo anzitutto che si tratta del numero che non risponde intorno ad alcuna domanda intorno al quanti, e che quindi *non è inteso relativamente ad una molteplicità*. Ad esempio, spesso facciamo un impiego *sostantivo* delle espressioni numeriche come 5, 8, ecc. Possiamo far comparire queste espressioni nel soggetto di proposizioni del tipo «cinque è un numero dispari» oppure «otto è un numero intero». In espressioni come queste non si parla dell'8 o del 5 come numeri-di..., ma di numeri *sic et simpliciter*, di numeri considerati essi stessi come *oggetti* e che hanno dunque le loro proprietà e intrattengono tra loro determinate relazioni.

Sta bene: ma che tipo di oggetti? Talora si risponde (ed anche noi potremmo rispondere così): oggetti ideali. O anche: oggetti intellettuali. Benché si possa dare non troppa importanza al fatto di usare l'una o l'altra espressione, fra le due vi è un'inclinazione senso abbastanza diversa. Impiegando la parola «intellettuale» sembra si attiri l'attenzione su una facoltà umana – l'intelletto, la facoltà di pensare – e l'oggettività verrebbe interpretata come un suo prodotto, una sua costruzione. Si tenderà allora a dare alla parola un'inflessione prevalentemente psicologica, come se «intellettuale» fosse qualcosa di equivalente a «mentale» e parlando di oggettività intellettuali intendessimo cose che esistono al massimo nella nostra mente. Il richiamare l'attenzione sull'idealità invece sposta l'attenzione su tutt'altro versante, richiamando piuttosto le «idee» nel senso di un'ontologia platonica.

Ma non è obbligatorio scegliere tra l'una e l'altra alternativa, tra l'ente nel senso più forte e il *flatus vocis*.

Si tratta piuttosto di dare senso a queste formulazioni riferendole a determinazioni di carattere *fenomenologico*. È appena ovvio notare che in questo contesto il richiamo ad un punto di vista fenomenologico implica che si metta da parte l'idea, che ha fatto tanti guasti sul terreno della filosofia della logica e del linguaggio, che vi sia sempre e necessariamente una grammatica nascosta sotto la superficie linguistica e che le questioni che il linguaggio propone alla riflessione filosofica siano sempre questioni intorno alla *riducibilità* di questa superficie, considerata come in via di principio fuorviante ed erronea, ad una forma che si pretende logicamente corretta.

In luogo di ciò, occorre riconoscere la presenza, proprio alla superficie degli impieghi linguistici, di *differenti modalità dell'intendere*. Questa nozione ci offre un modo assai interessante di riproporre la questione del numero come oggettività a sé stante, ed inversamente possiamo trarre di qui un esempio che può servire ad illustrare che cosa intendiamo dire parlando di differenza nella modalità dell'intendere.

L'espressione «5» viene *intesa* in modi diversi se essa compare nella risposta alla domanda «Quanti?» oppure nella proposizione «5 è un numero dispari». Se prescindiamo da considerazioni che stanno al di fuori di questi impieghi, attenendoci a ciò che in essi è implicato, non sembra possa sollevare obiezioni il fatto di riconoscere che nel secondo caso *viene intesa* un'oggettività, nel primo invece è implicata una molteplicità di cui si effettua, attraverso il numero, una determinazione.

Questa differenza può essere riconosciuta senza implicare, in rapporto al numero come oggettività a sè stante, né una scelta mentalistico-psicologistica né una scelta ontologico-platonistica. Questa è anche la ragione per la quale la scelta terminologica non ci sembra decisiva e non ci accingeremmo ad una discussione più approfondita per decidere quale delle due dizioni possa essere più appropriata. Poiché è certo che l'oggettività intesa non si incontra come tale nel nostro mondo circostante così come si incontrano invece alberi e case, l'una o l'altra espressione va altrettanto bene per marcare questa differenza che deve essere in ogni caso ricondotta ad una differenza nei modi dell'intendere.

In questi nostri primi passi cerchiamo dunque di attirare l'attenzione sull'importanza del nesso tra numero e molteplicità, sottolineando nello stesso tempo che, se da un lato vi è tra queste due nozioni un intreccio ricco di senso che va esplorato a fondo, dall'altro sarebbe sbagliato ritenere che il numero non possa essere «pensato» senza che sia «pensata» anche la molteplicità. Il numero come numero-di-oggetti e il numero come oggettività a sé stante vanno anzitutto indicate come modalità dell'intendere peculiarmente diverse. E il numero come oggettività a sé stante va difesa come una possibilità del tutto legittima.

§ 4

Numero cardinale – Le molteplicità ordinate – Il numero come numero-di-posizione – Cardinalità e ordinalità – I numeri iterativi – I segni numerici.

Il numero come quanto del molto ovvero il numero che presuppone l'idea della molteplicità come pluralità, e che noi abbiamo voluto chiamare anche numero-di-oggetti, è naturalmente ciò che comunemente si indica con il termine di numero cardinale. Nessuna caratterizzazione della cardinalità potrebbe fare a meno di richiamarsi ad una molteplicità in genere.

Nello stesso tempo non appena parliamo di cardinalità viene subito richiamata alla mente la nozione di ordinalità e di numero ordinale, sulla quale vogliamo ora spostare la nostra attenzione.

La grammatica della lingua italiana provvede a stabilire anche sul piano linguistico questa differenza proponendo degli specifici «numerali ordinali». Si tratta, come si sa, delle parole «primo, secondo, terzo, quarto, ecc.». Queste espressioni verranno impiegate quando ci troviamo alla presenza di una *moltepli-*

città ordinata e siamo interessati alla *posizione* che un certo elemento occupa in essa.

Un buon esempio di molteplicità ordinata sono le lettere del nostro alfabeto. Esse ci vengono insegnate esattamente secondo un certo ordine che comincia con la A e finisce con la Z, anche se quest'ordine non ha nessuna necessità interna. Cosicché ha perfettamente senso chiedere in quale posizione esattamente si trovi la lettera M – domanda a cui la lingua italiana ci raccomanda di rispondere con un numero ordinale. Di passaggio non è forse inutile osservare che se nella lingua italiana non esistessero affatto dei numerali ordinali, la distinzione concettuale non per questo verrebbe meno e saremmo tenuti a metterla in evidenza.

Potremmo allora dire che il numero ordinale è un tipo di numero che risponde alla domanda: «In quale posizione?» Anch'esso può allora essere caratterizzato come *numero-di*... e precisamente come *numero-di-posizione.*

La differenza tra cardinale e ordinale è per certi versi ovvia, e tuttavia, non appena ci si pensa un po' sopra, questa ovvietà tende ad attenuarsi. La differenza inizialmente chiara sta in questo: un conto è determinare *il numero degli elementi di un insieme* (parola che usiamo qui nello stesso senso di molteplicità o di pluralità) ed un altro è determinare la *posizione che un singolo elemento ha nell'insieme*.

Nel primo caso potremmo dire che l'ordine è del tutto indifferente, sia che esso ci sia o non ci sia. Le lettere dell'alfabeto restano ventuno sia che la recitazione dell'alfabeto cominci dalla A o dalla Z oppure che l'alfabeto venga scritto su tessere sparpagliate su un tavolo da leggere in un modo qualunque. Per qualunque ordine, il risultato del conteggio non cambia. Vedremo in seguito se il contare sia da riferire essenzialmente alla cardinalità – come saremmo forse indotti a pensare badando non tanto allo svolgimento dell'operazione di conteggio, quanto al suo risultato – oppure se il problema abbia un grado maggiore di complessità e debba essere affrontato in altro modo.

Nel caso del numero ordinale invece *non siamo interessati a determinare il numero totale degli elementi dell'insieme, ma la posizione di un singolo elemento in esso*.

Di fronte a queste differenze occorre però proporre una precisa relazione: se determiniamo la posizione dell'*ultimo* elemento di un insieme ordinato abbiamo determinato anche quanti sono gli elementi dell'insieme. Se sappiamo che la Z si trova al ventunesimo posto e che essa è l'ultima lettera sappiamo anche che vi sono 21 lettere dell'alfabeto. Naturalmente il numero di posizione della lettera M è anche il numero di lettere della molteplicità delle lettere comprese tra A e M.

Alla luce di questa constatazione, cardinalità e ordinalità ci appaiono ora assai meno nettamente differenziate di quanto potesse sembrare dalle considerazioni precedenti; e non vi sarebbe da meravigliarsi se sorgessero, pur a partire da determinazioni così semplici e chiare, nodi particolarmente difficili da dipanare proprio per ciò che riguarda il modo in cui esse si trovano in rapporto.

Nella teoria del numero si è molto discusso, ad esempio, *su quale fosse la nozione primaria del numero*, se la nozione cardinale o quella ordinale, e spesso si è pensato che, proprio per il fatto che l'ordine presuppone qualcosa da ordinare, si dovesse prendere le mosse da una nozione generale di molteplicità, e quindi da una nozione di molteplicità indifferente all'ordine. Una sorta di priorità spetterebbe così alla nozione di numero cardinale. Ma vi sono anche autorevoli teorie opposte. Ciò di cui spesso si sente la mancanza in questo genere di discussioni è un chiarimento preliminare sul senso in cui si parla di primarietà e il contesto in cui questo problema viene posto. In realtà l'interesse della questione diventa chiaramente visibile all'interno di un punto di vista genetico-costitutivo. L'interrogativo verrebbe così posto anzitutto *sul modo in cui cardinalità e ordinalità intervengono all'interno della formazione del concetto di numero.* In effetti stiamo costruendo il terreno per una ripresa della questione da questo punto di vista.

A queste due forme numeriche, per così dire, ufficialmente riconosciute, ne vogliamo tuttavia aggiungere una terza, che è intervenuta nelle discussioni sulla filosofia del numero assai meno delle precedenti, mentre noi intendiamo dare ad essa la massima importanza.

Si risponde con un numero non solo alla domanda «Quanti?» e «In quale posizione?» ma anche alla domanda «Quante volte?». Ciò suggerisce di istituire una *terza nozione di numero* da porre accanto a quella dei numeri cardinali e dei numeri ordinali.

La domanda «Quante volte?» è essenzialmente diversa sia dalla domanda «Quanti?» sia dalla domanda «In quale posizione?». A differenza di entrambe, essa non rimanda alla nozione di molteplicità, non rimanda dunque in genere ad *oggetti*, ma ad *azioni* o ad *operazioni* in genere.

«Quante volte ti sei bagnato nello stesso fiume?» – noi rispondiamo appunto «una volta, due volte, tre volte,...». Non possiamo assolutamente trascurare il fatto che ci troviamo qui di fronte ad un impiego del termine numerico che richiede, per essere illustrato, una situazione esemplificativa essenzialmente differente. Non solo il tema della molteplicità nel senso precedentemente inteso non assolve un ruolo, ma si affaccia qui per la prima volta il motivo della *ripetizione*.

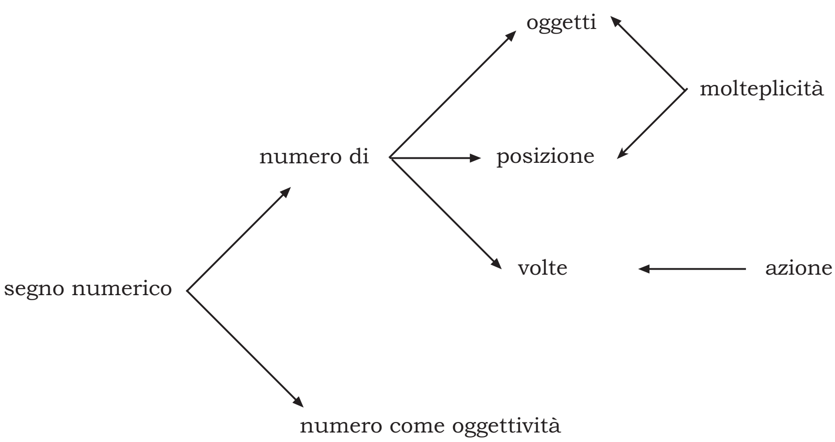
Nella lingua italiana non esiste una designazione numerica speciale come nel caso dei numeri ordinali. Nella lingua latina troviamo invece alcuni indizi interessanti. In essa «Quanti?» si dice *Quot*? e «in quale posizione?» si dice «*Quotus*». Tuttavia, oltre a *Quot* e *Quotus* il latino possiede anche la formula «*Quotiens*» (o «*Quoties*») che chiede appunto «Quante volte?». Ed a questa domanda si risponde con dei numerali specifici come «*semel, bis, ter, quater, quinquies*» (con carattere avverbiale) che sono diversi sia dai numerali cardinali (*unus, duo, tres, quattuor, quinque,* ecc.), sia dai numerali ordinali (*primus, secundus*, *tertius*, *quartus*, *quintus*, ecc.). Si tratta di un'accidentalità linguistica che tuttavia per noi assume il senso di un indizio significativo in relazione ad una specificità dell'impiego del segno numerico.

In assenza di una terminologia consolidata, vogliamo parlare di *numeri iterativi*. Il numero iterativo in quanto *numero-di-volte* apparterrà in ogni caso al tipo del *numero-di....* e dovrà essere contrapposto, insieme al *numero di oggetti* ed al *numero di posizione* al *numero inteso come oggettività a sé stante*. È opportuno notare che nel caso dei numeri-di... è sempre implicito un riferimento all'applicazione, mentre questo riferimento manca interamente nel caso dei numeri considerati come oggettività.

Ma vi è un altro significato notevole della parola «numero» nel discorso corrente. Talora questa parola designa equivocamente anche la *cifra*, il segno grafico, il grafema che indica il numero, ad es. il segno «5», che può essere equivalentemente sostituito da qualunque altra convenzione segnica, come «V» secondo la numerazione romana, o da qualunque altra *cosa* alla quale si sia attribuito un significato designativo numerico.

Diremo allora che una determinata cifra, ad esempio «5», *ha una duplice possibilità di riferimento*: ciò che viene inteso attraverso quel segno può infatti essere il numero come *numero-di...* ; oppure come *oggettività ideale*.

Possiamo riassumere ciò che abbiamo acquisito sino a questo punto nello schema che segue:



Si può intravvedere fin d'ora che l'intera nostra discussione successiva dovrà vertere sul modo in cui interagiscono fra loro i tipi diversi di numeri-di... e l'eventuale rapporto che sussiste tra essi e la nozione del numero come oggetto.

§ 5

Necessità di passare ad un'elaborazione più approfondita – La priorità della nozione di molteplicità rispetto a quella di numero – Il contare e la serie numerica – Il problema della determinazione della quantità sorge in inerenza alla nozione di molteplicità e indipendentemente dalla serie numerica.

Dobbiamo ora cercare di ordinare il materiale raccolto e farlo oggetto di una riflessione più approfondita. Intanto il nesso tra numero e ripetizione, che fin dall'inizio avevamo proposto come uno dei nostri temi centrali, fino a questo punto non si è certo mostrato in primo piano: tuttavia esso si è annunciato con l'introduzione dei numeri iterativi. Di fatto, mentre è subito chiara la sussistenza di un rapporto tra cardinalità e ordinalità, per quanti problemi possano poi sorgere nella sua elaborazione, il numero iterativo se ne sta a parte e resta da spiegare se e in che modo il tema della ripetizione e il concetto di numero si richiamino per ragioni essenziali.

Un approfondimento non può tuttavia venire insistendo sugli impieghi linguistici correnti, ma piuttosto imprimendo alla nostra discussione un andamento più nettamente «genetico».

Per fare questo passo avanti abbiamo già posto alcune premesse ed avanzato alcuni suggerimenti. Abbiamo parlato della molteplicità e della determinazione della molteplicità, ovvero del numero che spetta ad una molteplicità. Aggiungiamo ora che nelle nostre considerazioni precedenti era già implicito che la nozione di molteplicità (pluralità) sta *prima* di quella di numero.

Prima in che senso? – si chiederà subito.

A me sembra che si possa rispondere in modo forse un po' indiretto ma sufficientemente persuasivo dicendo che la domanda «quanti» può essere posta solo se *è già stata esibita* la molteplicità che deve essere determinata. Naturalmente la priorità in senso temporale, che è ovvia se facciamo riferimento ad un evento che si verifica effettivamente, ci interessa assai poco. D'altra parte esiteremmo a parlare di priorità «logica», a meno che non si voglia usare questo termine in un'accezione molto estesa. La molteplicità di cui parliamo qui *non è* la nozione logico-matematica di insieme, nella quale eventualmente può essere «fondata» una teoria del numero introducendo definitoriamente i concetti numerici a partire da essa – nel quale caso avremmo certamente a che fare con una priorità logica in un'accezione ben determinata. Preferiremmo invece parlare di una priorità genetico-fenomenologica poiché, come abbiamo notato or ora, non ci troviamo né sul terreno di eventi e di puri dati di fatto, né su quello del «pensiero puro». Ci avvaliamo invece di argomenti e di analisi che poggiano sempre su *possibili* esemplificazioni concrete – sull'immaginare di poter fare determinate cose e sulle condizioni di possibilità di questo fare liberamente immaginato.

In ogni caso, di fronte alla domanda «quanti», proposta rispetto ad una molteplicità effettivamente esibita, noi ci accingeremmo certamente a *contare* gli oggetti che appartengono ad essa. Questa azione non è un'azione qualunque come tendere un braccio per afferrare qualcosa. Per quanto possa essere considerata semplice, essa ci è stata comunque *insegnata*, ed anche se non siamo in possesso di una giustificazione teorica autentica, essa presuppone che sia per noi già costituito un concetto di numero ed una pratica ad esso corrispondente. Quando contiamo, nel senso usuale del termine, nel suo senso per così dire «adulto», *la serie dei numeri ci è perfettamente nota*. Vi è dunque un *sapere aritmetico*, per quanto elementare. Noi siamo invece interessati ad una situazione nella quale si ponga la domanda «quanti» senza che un sapere aritmetico sia già a disposizione, e questo non per un gusto astrattamente filosofico del mettere sempre tra parentesi tutto quanto di cui così spesso si parla nei libri dei fenomenologi senza che si sappia esattamente che cosa si dovrebbe fare: ma per il fatto che vogliamo cogliere in che modo, a partire dall'esistenza di molteplicità, sorga il problema della loro determinazione quantitativa e in che modo esso possa essere risolto. Non si tratta quindi solo di risalire al linguaggio corrente, traendo di qui qualche indizio che del resto può diventare realmente significativo solo in un'eventuale elaborazione successiva, ma piuttosto di delineare i *passi* che conducono dalla nozione di molteplicità alla nozione di numero. Quest'ultima dunque non potrà essere presupposta.

Un punto di particolare importanza è che questi passi sono da intendere come *passi di un percorso teorico*: si tratta infatti di avviare una vera e propria *analisi del concetto*, e non soltanto raccogliere insieme osservazioni e dati sulla sua storia. Ai fini della ricostruzione di questo percorso teorico il richiamo ad episodi che in qualche modo appartengono alla *storia del numero* può essere assai illuminante dal momento che in questa storia il problema teorico è ovunque presente e si mostra attraverso mille imprevedibili strade[1].

§ 6

Una favola della preistoria molto spesso raccontata – Il confronto tra molteplicità – Il numero non è una proprietà delle cose come il colore – Talvolta la quantità può essere determinata «a colpo d'occhio» – L'afferramento del «numero» come afferramento di una configurazione tipica – Importanza delle procedure indirette per il sorgere del problema del numero.

Abbiamo detto or ora che se ci venisse richiesto di determinare la quantità di elementi che formano una molteplicità, noi ci accingeremmo semplicemente a contarli. Ma abbiamo anche notato che, proprio per il fatto che nel conteggio la nozione di numero è già presupposta, questo non poteva essere affatto un buon inizio.

Naturalmente vi è una discussione che non possiamo trascurare come se niente fosse. In che senso il numero si trova in relazione con il contare? Quando cominceremmo a parlare di numero in un senso che potremmo ritenere appropriato, o comunque «propriamente aritmetico», e quando di contare? Siamo certi che il numero sia presupposto nel contare e che non abbia assolutamente senso parlare di un contare senza presupporre la nozione di numero? In breve, in tutte queste domande ci si chiede di chiarire

[1] Nell'esposizione successiva ci affideremo spesso, per questo aspetto, alla *Storia universale dei numeri* di G. Ifrah (Mondadori, Milano 1989) che rappresenterà per noi un prezioso sostegno in più di un'occasione.

in che cosa consista propriamente l'operazione del conteggio.

Raccontiamo anche noi la favola, tante volte raccontata, del pastore di molte migliaia di anni fa, il quale, avendo molte pecore, può temere, la sera, al ritorno dai pascoli, che qualcuna di esse si sia perduta in un anfratto.

Occorre dunque operare una determinazione della quantità. Per far questo dovranno essere paragonate due molteplicità di cose – le pecore del mattino e le pecore della sera. Il paragone tuttavia non può affatto avvenire sulla base dell'immediatezza della percezione. Proprio questa circostanza mostra nel modo migliore che *avere un certo numero* per una molteplicità è una «proprietà» in un senso piuttosto particolare: le proprietà delle cose si possono, in genere, paragonare direttamente. Il numero non si dà concretamente come il colore o la forma di una cosa. Se prendo un sasso lo posso confrontare con un altro e decidere sulla base di un confronto diretto se l'uno ha lo stesso colore dell'altro, oppure se l'uno ha una forma meno spigolosa e più arrotondata dell'altro. Il numero (la quantità) di oggetti di una molteplicità non può affatto essere determinato nello stesso modo, non può essere visto direttamente sulla molteplicità, ma è necessaria una *qualche procedura per effettuare questa determinazione*. Vogliamo notare che questa circostanza rappresenta già un indizio del fatto che forse il numero non è semplicemente una faccenda della percezione, che esso è anche, e forse soprattutto, una faccenda del *pensiero*. Tuttavia non è opportuno correre subito oltre seguendo la traccia suggerita da questo indizio. Questa nostra prima osservazione ha bisogno intanto di essere precisata.

Intanto, non è del tutto vero che il numero di una molteplicità non possa mai essere determinato «a colpo d'occhio». Se la molteplicità è abbastanza piccola, se il nostro pastore è molto povero e possiede ad esempio soltanto tre pecore, quando tornerà all'ovile basterà una fugace occhiata per togliere di mezzo ogni preoccupazione. Tuttavia, affidandoci al colpo d'occhio non andremo certo molto lontano. Forse è difficile superare cinque elementi o sei elementi – a meno che la stessa configurazione percettiva non si proponga in modo tale da proporre un raggruppamento e un'articolazione. Ad esempio, le seguenti configurazioni

oppure

sono certamente più «distinte» di

È possibile che simili operazioni di raggruppamento, che agevolano l'afferramento della quantità, vengano anche realizzate implicitamente proiettando un'articolazione possibile nella struttura percettiva così da realizzare una sorta di analisi, di riduzione dei molti ai pochi.

Ma proprio queste considerazioni ripropongono i nostri primi interrogativi intorno al numero ed al contare. Quando afferriamo a colpo d'occhio il numero non effettuiamo nessun calcolo, ma ci limitiamo a riconoscere percettivamente una configurazione percettiva che ha assunto per noi forma tipica, afferriamo dunque una *Gestalt*. È come se ci fosse una figura-del-tre, una figura-del-quattro, ecc. In una determinata molteplicità noi riconosciamo la presenza di quella figura.

In questo senso dicendo che può esservi una proiezione implicita di un raggruppamento non intendevamo suggerire l'idea di un intervento «intellettuale» (cioè di componenti relazionali estranei alla percezione), ma l'afferramento, dentro una determinata figura, di una configurazione tipica, ad esempio della figura-del-tre eventualmente ripetuta due volte.

Talvolta si fa notare che presso popolazioni molto primitive si potè constatare la presenza di *nomi per numeri* solo per quantità molto piccole e che la *sequenza dei numeri* si presenta talora nella forma 1, 2, 3, *molti*, cosicché – si dice – si saprebbe *contare* solo fino a tre. In realtà parlare di nomi per numeri, di sequenza dei numeri e di contare come se si avesse qui a che fare con un'aritmetica rozza e primitiva, *ma comunque con un'aritmetica*, fa perdere di vista la natura del problema che questi casi interessanti illustrano con evidenza.

Le distinzioni che qui vengono effettuate sono infatti distinzioni eminentemente qualitative tra molteplicità che hanno configurazioni percettive distinguibili e differenziabili tra loro e molteplicità che confluiscono invece tutte nella designazione «molti» *in quanto rimandano a loro volta ad una configurazione tipica* della «numerosità» che potrebbe essere esemplificata altrettanto bene dal cielo stellato, da un mucchietto di sassolini o dagli alberi di una foresta.

Se mettiamo l'accento su questo punto, allora avremo ragione di osservare che la problematica del numero in questi casi la intravvediamo solo balenare in lontananza.

La circostanza per la quale la serie così presto si blocca – circostanza che può sembrare assai difficile da comprendere, per quanto possa essere primitivo il livello di sviluppo presupposto – diventa invece immediatamente comprensibile non appena si sottolinea il fatto che è in quesione la capacità di afferramento e di discriminazione della quantità attraverso la percezione e che il livello primitivo di sviluppo consiste non già nel non sapere andare oltre, ma nella mancanza dell'idea stessa della serie dei numeri. Non dobbiamo dire: sanno contare solo fino a tre. Bensì: *non sanno affatto contare*.

Del resto la nostra capacità di discriminazione non è affatto dissimile dalla loro.

§ 7

Il metodo del tanti-quanti – La formazione di insiemi-modello per la determinazione della quantità – Assenza di una generalizzazione autentica del metodo – Nel metodo del tanti-quanti non si sa nulla sul numero, non si conta, e nemmeno vi sono nomi per numeri.

Stando al «colpo d'occhio» la strada verso il numero è rigorosamente sbarrata. Torniamo allora alla nostra favola del pastore preistorico di cui non abbiamo ancora narrato l'epilogo.

Nella sua *Storia universale dei numeri*, Ifrah dopo aver parlato di ciò che egli chiama «sensazione numerica» – indicando con ciò «una sorta di percezione diretta dei numeri», in un senso prossimo[2] a quello che abbiamo illustrato or ora parlando di afferramento diretto del numero – prende in considerazione il «primo procedimento aritmetico» e lo individua, come del resto ciascuno avrebbe ragione di attendersi, in un'operazione di *corrispondenza biunivoca.* In realtà usare una simile espressione o altre espressioni tecniche di origine logico-matematica di significato analogo, non è troppo opportuno perché essere debbono essere mantenute nel contesto che è loro proprio. Poiché ci stiamo occupando di una situazione quanto mai remota, che si perde nella favolosa notte dei tempi, e siamo dunque lontanissimi dai modi di approccio di un'esposizione formale, preferiamo riferirci a questa operazione parlando di *metodo del tanti-quanti*. Espressione certo più rozza, ma degna appunto della rozzezza di un pastore.

Qui abbiamo a che fare con molteplicità concrete – e non con «insiemi» pensati nella teoria formale corrispondente – e dunque nemmeno con domini, codomini, iniezioni, suriezioni, biiezioni, ecc. Inoltre non possiamo affatto permetterci di dimenticare che il problema della *determinazione delle quantità* emerge in questo contesto come un problema legato a primitive pratiche quotidiane, normalmente legate a interessi di ordine economico in senso lato, scambi di merci, determinazione delle doti delle donne da marito, ed anche di altro ordine, ad es. di ordine magico-rituale e religioso (enunciazione di un numero prefissato di litanie, di lodi del signore, ecc.). In che cosa consiste dunque il metodo del *tanti-quanti* considerato su questo terreno primitivo-concreto? Consiste nel rispondere alla domanda «Quanti?» non già con un *termine numerico (nome di numero)*, raggiunto come risultato di una procedura di conteggio, ma nell'esibizione di una molteplicità che è stata posta in corrispondenza uno a uno con la molteplicità che deve essere determinata. Alla domanda: «Quanti?» che ci viene proposta mostrando a

[2] Prossimo, ma non identico. Per Ifrah (*ibid.*, pp. 18 sgg.) come per altri autori si tratta soprattutto di riconoscere una sorta di afferramento istintivo, che potrebbe trovarsi anche presso gli animali. La questione viene invece richiamata da parte nostra con riferimento al problema della perspicuità, che si ritrova esattamente negli stessi termini anche a livello simbolico-notazionale.

dito una certa molteplicità di oggetti, si risponde mostrando a dito un'altra molteplicità dicendo: «Tanti così». In rapporto al pastore preistorico: egli escogiterà su questa base una procedura di verifica che assolve allo scopo. Ad esempio, egli farà rientrare le pecore ad una ad una nell'ovile associando ad ogni pecora un bastoncino, oppure una pietruzza, o un'altra cosa qualunque.

In questo modo realizza quello che potremmo chiamare un insieme-modello[3] per il suo gregge. Sa che il suo gregge ha tante pecore quante sono i bastoncini che conserva eventualmente in un sacchetto – e di conseguenza riesce ad effettuare la valutazione a cui è interessato.

Naturalmente restiamo qui inizialmente *vincolati ad una situazione del tutto particolare*, particolare è il compito da svolgere – si tratta proprio del gregge, e di null'altro – particolare è il sacchetto con i suoi bastoncini che servono esattamente a quello scopo, e a null'altro.

Si comprende però anche che, giunti a questo punto, è subito possibile un passo significativo verso un'applicazione un poco più ampia del metodo. I bastoncini infatti sono *rappresentativi* di una *certa* quantità di oggetti. E si potranno possedere svariate collezioni di oggetti, differenti *qualitativamente* in modo da non confonderli tra loro, ed ognuna di esse sarà rappresentativa di una *certa* quantità di oggetti. Avremo dunque a disposizioni *svariati insiemi-modello* – una collezione di bastoncini, una di conchiglie, un'altra di noci di cocco o di chicchi di caffè[4]. Di fronte ad una molteplicità da determinare nella sua quantità essa potrà essere messa alla prova del tanti-quanti, e potremo forse trovare tra i nostri insiemi-modello un insieme corrispondente ad essa.

Appare tuttavia subito chiaro che non si tratta di un'effettiva generalizzazione. L'idea di un metodo di determinazione quantitativa che non sia un metodo per *qualsiasi* molteplicità può essere per noi, uomini evoluti, abbastanza difficile da comprendere: eppure bisogna prender nota di questa mancanza di

[3] L'espressione è impiegata da Ifrah e ci sembra efficace.
[4] G. Ifrah, *op. cit.*, p. 28.

generalità che è strettamente dipendente dalla rete di interessi in cui è ancora inviluppato l'interesse conoscitivo.

Possiamo immaginare che per il pescatore di perle di un milione di anni fa non tutte le molteplicità siano egualmente significative – come del resto accade a noi tutti nella nostra vita normale: egli non si accingerà mai a «contare» le pietruzze della riva, ma le perle raccolte in giornata, e queste del resto non faranno mai un mucchio grande come una montagna.

Un metodo per effettuare la determinazione delle poche molteplicità che rientrano negli interessi quotidiani è quanto basta e la questione generale di un possibile metodo per la determinazione quantitativa di *qualunque* molteplicità, di cui la procedura applicata nel caso particolare possa essere considerata una specializzazione, non si pone nemmeno. La molteplicità con cui si ha a che fare è ora sempre una molteplicità data o una molteplicità empiricamente possibile e non *il pensiero puro di una molteplicità* (cosa che significa poi: una molteplicità possibile in generale).

Ciò mostra inversamente quale ricchezza di significato sia nascosta in parolette come «qualsiasi», «ogni», «qualunque». Si può fare riferimento ad esse per spiegare in modo semplice ed elementare che cosa significhi il rendersi autonomo di un interesse puramente conoscitivo; ed anche l'importanza decisiva che questa autonomia riveste per il passaggio al pensiero astratto.

Sulla base di queste considerazioni dobbiamo riproporre la nostra domanda iniziale: in rapporto alla procedura del tanti-quanti possiamo parlare propriamente di numero? In essa si effettua un conteggio effettivo della quantità?

La risposta sembra dover essere ancora fondamentalmente negativa. La via verso il numero è stata imboccata, ma ci troviamo solo al suo inizio. L'opinione che lo stesso Ifrah propone nella discussione degli insiemi-modello ci sembra possa essere largamente condivisa.

«Questo artificio della mente – egli osserva – non fornisce però solo un modo per istituire un confronto tra due raggruppamenti, ma *permette anche di pervenire a parecchi numeri, senza pertanto contare, e neppure nominare o conoscere le quantità* *implicate*»[5]. Dunque da un lato ci troviamo oltre la mera apprensione diretta della quantità, dall'altro attraverso il metodo del tanti-quanti non si conta, e nemmeno si sa qualcosa del numero o della sua nozione. In particolare non vi saranno nomi per numeri.

Una simile affermazione ha una sua incontestabile plausibilità. All'interno di una considerazione genetica dobbiamo affermare che il numero resta inaccessibile al metodo del tanti-quanti: in effetti non sappiamo affatto quanti siano gli oggetti della molteplicità, ma siamo soltanto in grado di effettuare una valutazione di certe molteplicità, e precisamente di quelle molteplicità che possono essere confrontate con i particolari insiemi-modello che sono a nostra disposizione.

Pensiamo alla pratica del rosario che sopravvive ancora oggi sia presso la religione cattolica sia presso altre religioni, ad esempio la religione mussulmana nella quale essa serve per enunciare gli attributi di Allah o le sue lodi[6]. Naturalmente si tratta di una pratica fondata sul tanti-quanti, ed essa può essere esercitata senza avere la minima idea di quante siano le Ave Marie o gli attributi di Allah enunciati.

Potremmo dire che ci muoviamo ancora nell'ambito della semplice caratterizzazione del «molti» anche se vi è qui una novità considerevole: all'idea del «molti» si è aggiunta infatti la coscienza della *piena determinatezza e della possibilità della piena determinazione*.

Io non so quanti siano gli attributi di Allah, ma sono certo, quando sono arrivato alla fine del rosario, di averli detti tutti e, se mi fermo prima, di averne trascurati alcuni. La molteplicità degli attributi di Allah non è un puro «molti» – ma è una molteplicità come un tipo ben determinato dal suo «rosario» ed essa differisce da altre molteplicità altrettanto ben determinate ed alle quali corrisponde un «rosario» del tutto diverso.

L'elemento qualitativo mantiene dunque ancora la massima importanza. I «rosari», gli insiemi-modello, debbono essere riconosciuti per qualche caratteristica che ci consenta di distinguerli l'uno dall'altro e questa caratteristica non potrà natural-

[5] *ibid.*, p. 25.
[6] *ibid.*, p. 25.

mente essere la «numerosità», bensì il colore, la forma, il fatto che l'uno è costituito di conchiglie e l'altro di grani di caffé. Il materiale rappresentativo come tale è irrilevante, ma non è irrilevante la *differenza qualitativa* degli oggetti che formano la collezione perché il tipo di molteplicità è caratterizzato proprio in base ad essa.

§ 8

La strana importanza delle mani nelle procedure del contare – In che modo si usano le mani quando ci accade di contare con il loro aiuto? – La mano come prima «macchina da calcolo» – I metodi corporei in genere – Esempi – Ciò che vi è di nuovo nei metodi corporei.

Tutti sanno che nelle procedure di conteggio hanno avuto una grande importanza le nostre mani. Ancora oggi vi è l'abitudine, in particolari circostanze, di contare facendo riferimento alle dita della mano. Quando vogliamo insegnare ai bambini molto piccoli i primi rudimenti dell'aritmetica è un comportamento comune e quasi istintivo ricorrere all'aiuto delle mani.

Eppure una simile pratica tanto nota ed una consuetudine così diffusa non è poi molto facile da capire, se in luogo di accettarla come ovvia attirassimo su di essa l'attenzione come una circostanza che richiederebbe qualche spiegazione. In che senso ci possono aiutare le mani in una faccenda come è quella del numero? Inoltre: in che modo propriamente usiamo le mani quando ci accade di contare con il loro aiuto? Dobbiamo fare anche un certo sforzo per rammentare esattamente che tipo di gesto facciamo quando contiamo servendoci delle mani, e forse proprio quel gesto potrebbe non essere obbligatorio. In luogo di esso se ne potrebbero fare degli altri.

Io, ad esempio, comincio con il pugno chiuso, leggermente inclinato verso il basso, e poi sollevo via via le dita – talvolta, mentre compio questo gesto, vado farfugliando un numero dopo l'altro. In questo modo mi aiuto con le mani... ma in che cosa e per che cosa questo gesto mi giova? Ora più che mai mi accorgo che non so affatto che cosa significhi propriamente il contare.

Quando conto e come conto? Contare significa forse alzare via via le dita in questo modo, farfugliare sottovoce i nomi dei numeri che ho appreso a scuola?

Forse hanno ragione coloro che sostengono che il contare sia nient'altro che un processo psicologico o meglio un comportamento di un certo tipo, socialmente indotto: non sarebbe allora affatto strano che vi siano diversi modi di contare che hanno poco o nulla a che vedere con le determinazioni concettuali del numero. Potremmo addirittura, rovesciando la direzione di discorso che abbiamo sostenuta poco fa, ritenere che potrebbe essere molto interessante, dal punto di vista logico, assumere la corrispondenza biunivoca come base per il concetto di numero *proprio per il fatto che in essa finalmente non si conta*. Si lascia così il contare agli psicologi, agli etnologi ed altri antropologi, oltre che naturalmente all'immaginazione speculativa dei fenomenologi.

In realtà in precedenza, notando che laddove non si conta nemmeno può esservi il numero, abbiamo posto l'accento sull'esistenza di una relazione interna, *concettuale*, tra il contare e il numero. Fino a questo punto tuttavia si tratta di una pura istanza non dimostrata, ed anzi potremmo essere costretti ad ammettere di sapere ben poco sul significato del *contare* in genere, se escludiamo che ci possano interessare le minuzie di un puro gesto comportamentale.

Ma che non si tratti per nulla di questo, che il contare con le mani, oltre a rientrare fra le consuetudini più arcaiche, abbia un senso che va ben oltre queste minuzie e sia tutt'altro che irrilevante sotto il profilo di un discorso teorico, lo si comincia ad imparare proprio lasciando da parte i nostri gesti più o meno abituali, che sono in effetti poco interessanti, e cercando invece di accertare meglio in che senso la mano intervenga nel processo di formazione del numero.

Nella *Storia* di Ifrah si trova una documentazione impressionante della varietà dei metodi di conteggio con le mani.

Con le mani – accenno soltanto alla questione – non si conta certo solo fino cinque o dieci ma, con metodi ingegnosissimi, si può arrivare a numeri piuttosto elevati, che comprendono anche l'uso della base. Anzi l'intero capitolo dedicato all'invenzione della base, invenzione fondamentale per arrivare ad un autentico dominio del campo dei numeri, è trattato da Ifrah interamente con riferimento alle tecniche di conteggio manuale, a cui può essere riferita non solo la base cinque e la base dieci, che con le mani hanno un riferimento piuttosto evidente, ma anche la base dodici e la base sessanta il cui impiego e la cui origine è assai più enigmatica.

La mano, egli osserva, costituisce la prima «macchina da calcolo» di tutti i tempi[7]– ed è certo molto interessante che una simile espressione venga impiegata da un autore come Ifrah che è anche esperto di informaitica e di calcolatori: egli non avrebbe certo impiegato l'espressione di «macchina da calcolo» se avesse ritenuto il riferimento alle mani come un fatto provvisto, per così dire, di un valore puramente narrativo.

Un poco rassicurati nei nostri intenti, cominciamo a prendere coraggio ed a precisare le nostre idee sulla faccenda del contare come processo «psicologico».

Anzitutto quest'ultima espressione suona assai singolare se riferita a questo contesto. In fin dei conti la mano è tutto meno che un componente psichico, la mano è una mano, semplicemente: una parte del corpo, e non un elemento dei nostri vissuti. Di fatto la documentazione di Ifrah riguarda la mano proprio da questo punto di vista: essa interviene all'interno di una trattazione che riguarda quelli che Ifrah chiama i metodi corporei in genere.

A tutta prima sembra si tratti soltanto di possibili varianti del metodo del tanti-quanti. In luogo di prendere dei bastoncini o delle conchiglie, facciamo riferimento alle dita della nostra mano cominciando, come facevano i Papua della Nuova Guinea, dal dito mignolo della mano destra[8].

In una descrizione più precisa: con la mano sinistra tocco il dito mignolo della mano destra quando la prima pecora è entrata nell'ovile; poi tocco l'anulare, il medio, l'indice, il pollice. E non mi fermo qui. Procedo verso il polso, il gomito, la spalla destra – e poi ancora più su l'orecchio destro, l'occhio destro, il naso, la bocca, l'orecchio sinistro... e via di questo passo toccan-

[7] *ibid.*, p. 72.
[8] *ibid.*, p. 30.

do tutte le parti importanti del corpo, genitali compresi (che corrispondono al numero ventisette) fino alle dita dei piedi. Dopo le quali, anzi precisamente dopo il mignolo del piede sinistro, cominciano semplicemente i «molti» (a meno di ulteriori artifici si perviene in questo modo al numero 41).

In apparenza dunque non faccio nulla di diverso dal metodo dei bastoncini e delle conchiglie. Di fatto potremmo sostenere che non c'è qui alcun conteggio vero e proprio e nessun numero nello stesso senso in cui sostenevamo ciò nel caso del metodo tanti-quanti.

Potrebbero non esserci addirittura nomi per numeri, essendo la quantità designata dal *percorso* ad es. *dal mignolo al gomito destro* o *dal mignolo all'orecchio sinistro* essendo naturalmente tale percorso fissato una volta per tutte. Alla domanda «quante perle?» si risponde, ad esempio: *dal mignolo all'ombelico.*

Possiamo parlare veramente del nome di un numero di fronte ad una simile designazione e di numero per ciò che essa designa?

In realtà, se c'è numero, questo non ha alcuna autonomia rispetto al gesto, ma è ancora tutto impastato dentro di esso.

Il riferimento al gesto ed alle parti corporee sembra dunque essere l'unica differenza del metodo corporeo rispetto al metodo del tanti-quanti. Ad un primo sguardo questa differenza appare concettualmente irrilevante. Al più potremmo notare come un progresso il fatto che invece di dover ricorrere ad un molteplicità di insiemi-modello, in questo caso l'insieme modello è uno solo. Un progresso significativo, ma non più di tanto.

Le cose invece stanno altrimenti. Avremmo infatti una ben scarsa capacità di osservazione se non notassimo che vi è una differenza assai vistosa che in realtà ci porta su un terreno interamente nuovo. Questa differenza consiste nel fatto che l'insieme modello è un *insieme ordinato*, le mie dita non sono contenute in un sacchetto e io non le vado casualmente estraendo ad una ad una. Si tratta invece di un *percorso* che io debbo compiere e che deve essere *invariabilmente lo stesso*, cioè deve cominciare sempre dal dito mignolo della mano destra e proseguire nel modo che abbiamo detto: non può cominciare una volta dal dito mignolo della mano destra, un'altra volta dal pollice della mano sinistra o dall'orecchio destro. Altrimenti non potrei assolutamente raccapezzarmi e la funzione di unico insieme-modello verrebbe interamente meno.

Il progresso rappresentato dall'unicità dell'insieme modello è strettamente legato e dipendente dal radicale mutamento nell'applicazione del metodo del tanti-quanti che ora si riferisce ad una molteplicità ordinata.

Si noti di passaggio che l'ordine, che pur in qualche modo appartiene ad un «rosario», non interviene a riorientare in modo significativo quella procedura in questa nuova direzione. Esso appartiene in certo senso più all'oggetto come tale che al modo del suo impiego. In realtà l'inizio, in un rosario, potrebbe essere deciso di volta in volta, essendo necessario soltanto che esso venga tenuto fermo per ogni particolare operazione di conteggio.

Riflettiamo ancora su questo punto: questioni come quelle sul modo di contare dei Papua non rafforzano proprio la tesi di coloro che ritengono queste faccende prive di interesse sotto il profilo teorico? Vi sono infatti riferimenti a pratiche particolari, relative ad un determinato contesto culturale, e non è certamente difficile richiamare l'attenzione sulla loro accidentalità.

La nostra opinione è invece che proprio sulla base di un simile esempio risulti molto chiara la differenza che deve essere posta tra aspetti accidentali ed aspetti invece che accidentali non sono ed hanno una notevole rilevanza concettuale.

Accidentale ovvero concettualmente irrilevante, è il fatto che si cominci in un modo piuttosto che nell'altro, dal mignolo piuttosto che dal pollice; e persino il fatto che il riferimento dominante sia una parte del corpo o il corpo intero, per quanto questa circostanza possa essere interessante da altri punti di vista.

Non sono invece irrilevanti le ragioni per cui il corpo assolve qui un ruolo tanto significativo: esso rappresenta esemplarmente un sistema ordinato in genere, il sistema ordinato che ci è al tempo stesso più noto e più vicino.

Riusciamo così a identificare con chiarezza in che cosa consista propriamente la componente psicologica – un punto che in genere non viene affatto precisato proprio da coloro che intendono il contare come mero processo psicologico: essa consiste nel vissuto della corporeità come un sistema che si presenta con la massima evidenza come provvisto di un ordine interno – sistema che viene messo in opera nel coordinamento delle proprie attività finalizzate al raggiungimento di uno scopo.

Ma se si tratta di questo è evidente che questa componente può essere neutralizzata, essendo subordinata al problema dell'ordine che assume invece il massimo rilievo dal punto di vista concettuale.

§ 9

Emergere del problema dell'ordine e legame tra la procedura di conteggio e l'idea della posizione – Conte, filastrocche infantili ed altre strane usanze – In che senso potrebbe essere giusto parlare del corpo come «origine dell'aritmetica».

La parola «contare» comincia finalmente ad assumere una fisionomia più precisa, anche se molti dubbi restano aperti. Il conteggio è infatti ancora profondamente innestato nel gesto che lo accompagna e non viene ancora districato da esso.

«Nessuno di tali riferimenti corporei è visto dagli indigeni quale 'numero', trattandosi piuttosto ai loro occhi dell'ultimo elemento di un insieme tipo al termine del quale si perviene in seguito a una precisa successione di movimenti rivolti a quelle parti del corpo»[9] .

Tutto ciò ha un'importante conseguenza. Come abbiamo già messo in rilievo, nessuna parte del corpo presa in se stessa può valere come *segno di un numero*, ad es. per indicare il numero 7: «La mera designazione di una di esse non basta a caratterizzare una certa quantità di esseri o di oggetti se questa non è corredata dalla serie dei gesti corrispondenti»[10].

Non c'è dunque né il numero né un'effettiva effettiva designazione di esso. È emerso tuttavia il nuovo motivo dell'ordine ed è proprio in base a questo motivo che siamo vicinissimi a superare in modo netto e definitivo il metodo del tantiquanti: ci troviamo sul punto di realizzare questo superamento e

[9] *ibid.*, p. 32.
[10] *ibid.*

di acquisire una nozione astratta di numero e di pervenire ad una sua effettiva simbolizzazione.

Una situazione di transizione verso questo obbiettivo non è difficile da immaginare: si tratterà di una situazione in cui si farà riferimento agli elementi concreti della serie, chiamandoli proprio con il loro nome consueto – mignolo, anulare, medio, indice, pollice: ma, essendo questo ordine perfettamente costante, le parole impiegate in questo contesto tenderanno a distaccarsi sempre più dal loro significato concreto che le vincola alle dita della nostra mano per assumere il significato astratto della *posizione all'interno di una sequenza ordinata*.

Particolarmente interessanti per l'evidenza che conferiscono al problema dell'ordine gli esempi forniti da Ifrah in cui vengono impiegate pure e semplici forme verbali, talvolta senza significato o divenute tali, come procedure di conteggio che naturalmente possono sopravvivere anche dopo la «scoperta» del numero.

Tra queste vanno annoverate le «conte» nei giochi infantili, quando si deve scegliere a caso uno dei protagonisti del gioco.

Am, stram, gram
Pike, pike, kollegram
Bouré, bouré, ratatam,
Am, stram, gram

Così dice una vecchia filastrocca germanica, che ha un senso ma che è anche ai limiti del non senso[11]. Queste «conte» ricordano lo stile delle formule magiche ed in effetti potrebbero ricollegarsi di fatto ad esse. Numerose sono le credenze superstiziose sui malanni del contare; nella capanna è meglio non dormire con i piedi rivolti all'uscita per evitare che gli spiriti maligni ti contino le dita dei piedi[12] con conseguenze sicuramente spiacevoli. Cosicché se vogliamo o dobbiamo a tutti i costi contare qualcosa potrebbe essere una buona idea non usare i noti nomi dei nume-

[11] *ibid.*, p. 39.
[12] *ibid.*, p. 38.

ri. E cos'altro allora? Una filastrocca, ad es., una litania, una formula verbale qualunque purché le parole abbiano un'ordine assolutamente fisso. Questa è la condizione importante, mentre il significato delle parole è irrilevante. Se ne avevano uno, tenderanno a perderlo assolvendo sempre più la funzione generale di indicatori di posizione.

Forse l'esempio più notevole non è tratto né dalla storia, né dal folklore, ma da un ricordo personale riferito da Ifrah di un bambino disadattato che enumera le cose che gli stanno intorno usando nomi di altri bambini: André, Jacques, Paul, Alain... Da dove deriva questa – vorremmo quasi dire – strana usanza? Deriva dal fatto che nel dormitorio del collegio in cui vive, André occupa il primo letto, Jacques il secondo, Paul il terzo, Alain il quarto... Cosicché quest'ordine si è imposto come una sorta di ordine-modello a cui il bambino riporta le molteplicità da contare.

Evidentemente il riferimento ormai non è più quel determinato bambino che dorme nel primo letto, e non è nemmeno un nome provvisorio che viene attribuito ora a questo ora a quell'altro oggetto, ma tende ad essere appunto niente altro che un *nome di posizione* e nello stesso tempo un *mezzo per contare*[13].

Importante dunque non è il corpo umano come tale, per quanto possa essere detto *origine dell'aritmetica*[14], ma il modello di ordine che esso esibisce e che tende a diventare un ordine astratto: «I rispettivi riferimenti... evocano allora in misura sempre minore le parti del corpo, identificandosi invece sempre più con una determinata serie di numeri; essi tendono dunque a distaccarsi dal contesto loro proprio e a divenire applicabili a esseri, oggetti o elementi qualsiasi. È questa la ragione per cui le tecniche corporee del numero rivestono tanta importanza nella storia universale dell'aritmetica, essendo indubbiamente esse ad aver fatto assumere coscienza ai nostri lontani progenitori della nozione di ordine, destinata a svolgere un ruolo essenziale sia in matematica che in ogni altra scienza. Grazie a ciò esse hanno permesso loro di acquisire poco alla volta la facoltà del computo, inaugurando la strada di un'effettiva comprensione dei nume-

[13] *ibid.*, p. 39.
[14] *ibid.*, p. 40.

ri astratti. Senza di esse i nostri procedimenti numerici probabilmente non avrebbero superato la fase delle tecniche elementari dell'appaiamento»[15].

§ 10

Ciò che manca ai metodi corporei per approdare realmente sul terreno del numero – Limiti dell'organicismo dell'ordine – In che senso parlare del corpo come origine dell'aritmetica potrebbe essere del tutto sbagliato.

È opportuno in ogni caso indugiare un poco sulle ragioni per le quali non possiamo affatto arrestarci alle acquisizioni precedenti, certo già in se stesse significative[16].

In fin dei conti non siamo ancora affatto approdati alla serie numerica vera e propria, nemmeno nella forma cieca in cui la abbiamo imparata a scuola, alla «filastrocca» dei numeri – 1, 2, 3, 4... Possiamo solo affermare che ormai siamo abbastanza vicini ad essa. Tuttavia se chiedessimo se le parti del corpo percorse in successione possano *forse* essere intese come *qualcosa di simile* ad una serie numerica, sembrerebbe giusto dare una risposta dubitativa. Restiamo ancora nell'ambito delle grossolanità qualitative, e d'altronde nulla è più caratteristico del fatto che la successione si chiude inesorabilmente sul mignolo del piede sinistro, oltre il quale non può esservi altro che l'indeterminatezza dei «molti».

In realtà ha scarsa che importanza che il «molti» venga dopo il numero dopo il numero tre o il numero cinque o il numero 41. Ciò che manca in ogni caso è l'*idea della proseguibilità infinita*. Ma allora c'è qualcosa che non va nel tipo di relazione

[15] *ibid*. Si veda anche a p. 44 la citazione tratta da T. Dantzig, *Il numero, linguaggio della scienza,* tr. it., La Nuova Italia, Firenze 1965.

[16] Ad esse peraltro si arresta l'esposizione di Ifrah, che procede poi per la propria strada affrontando in vari modi la problematica dei metodi di calcolo. Per gli scopi che l'autore si propone, quell'esposizione può essere considerata sufficiente. In rapporto ai nostri interessi teorici essa ha invece un carattere soltanto preliminare e dobbiamo introdurre ulteriori perfezionamenti e precisazioni.

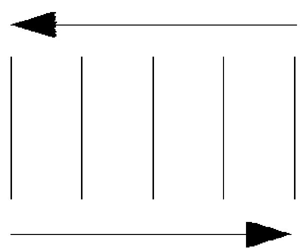
che si istituisce tra l'uno e l'altro elemento della serie ordinata data. Questa relazione è tale da non proporre o imporre a partire da se stessa la possibilità della prosecuzione.

Qual è il senso di questa circostanza tanto singolare, come può accadere che l'idea dell'ordine non si incontri con quella della proseguibilità infinita, che sembra essere ad essa strettamente correlata? Evidentemente, l'ordine di successione, così come è fissato nel sistema corporeo è strettamente *subordinato al dato di fatto di questo sistema*, cosicché l'essere prima, il precedere o il seguire *non ha alcun senso generale* e resta interamente *all'interno del sistema stesso*. Questo sistema è un sistema *chiuso*: il nostro corpo non si prolunga fattualmente al di là delle nostre membra. Possiamo riconoscere un ordine *in* esso, *in* esso vi è la possibilità di un percorso relativamente stabile, sia pure con qualche margine di gioco. Di conseguenza quando il sistema «termina», ovvero raggiunge i proprio confini, termina anche ogni appiglio per il proseguimento di un ordine. Il «molti» indeterminato, che subentra all'ultimo elemento del sistema, ha il senso dell'*essere-fuori-dal-sistema*, e tutto ciò ha anche strettamente a che vedere con il tipo di relazione che collega l'un membro all'altro.

Di che tipo di relazione si tratta? Non c'è dubbio che, come abbiamo già osservato, la scelta del metodo corporeo sia dovuta al fatto che nell'esperienza corporea è avvertita la connessione delle parti e la loro correlazione interna in senso psicofisiologico: cosicché le parti che costituiscono i nodi della successione stanno l'*una accanto all'altra*, assumendo questo senso solo in virtù della loro appartenenza all'intero fattuale della corporeità. Ora questa caratteristica, che in qualche modo ci avvicina alla problematica del numero, anche ce ne allontana poiché questo essere l'uno accanto all'altro ha un carattere concreto, non meramente relazionale. Al 41 non segue il 42 *per il semplice fatto che accanto al mio piede e fuori da esso non c'è nulla che mi appartenga come il mio dito mignolo.* Quindi c'è *un essere accanto all'altro* in forza di un'unità sovraordinata, e nello stesso tempo questa forma relazionale non ha la possibilità di svilupparsi al di fuori dell'unità a cui le parti sono subordinate. L'organicismo che rappresenta un superamento della mera dispersione del metodo del tanti-quanti e che suggerisce il problema dell'ordine, rappresenta un limite che deve essere superato.

Vogliamo spiegare meglio questo punto.

Un esempio di ordine non troppo dissimile a quello delle dita di un mano potrebbe essere quello di una fila di alberi. Volendo mettere in evidenza essenzialmente l'aspetto dell'ordine, e quindi la forma tipica della fila, questa potrebbe essere schematizzata con una sequenza di tratti:



In questo stesso modo potrebbe essere schematizzata anche la successione delle dita delle mani. Naturalmente affinché si dia la percezione di una successione questa figura deve essere intesa come percorsa da sinistra a destra o da destra a sinistra, e siamo liberi di scegliere l'uno e l'altro percorso così come siamo liberi di scegliere di prendere le mosse dal mignolo oppure dal pollice. Ma a parte questo margine di gioco, la fila si presenta percettivamente come una fila, e quindi con un ordine in qualche modo «interno» alla configurazione, ed ogni elemento della configurazione occupa in essa una posizione determinata. Naturalmente vi sono varie condizioni che debbono essere soddisfatte affinché si dia questa forma, ad esempio gli alberi debbono essere approssimativamente a distanza eguale, ecc. L'effetto della fila può essere rafforzato o indebolito variando certe circostanze (ad esempio, l'altezza, ecc.).

Stando alle apparenze delle configurazioni percettive dobbiamo distinguere piuttosto nettamente tra configurazioni del tipo «una fila di alberi» da configurazioni del tipo «un mucchietto di sassolini». Un sassolino ha con l'intero una relazione piuttosto debole, e così anche con un altro sassolino. Ad esempio, se viene tolto un elemento da una fila si noterebbe una lacuna, e se viene tolto più di un elemento la configurazione può risultare scompaginata. Ciò non accade con i sassolini. Ed è inutile dire che un certo sassolino può occupare un luogo qualunque nel mucchietto – ed anzi proprio per questo si parla di «mucchietto».

Tra l'uno e l'altro caso vi è tuttavia un nesso. Se abbiamo tratto alcuni sassolini e poi li abbiamo messi in una fila, possiamo sempre rimettere i sassolini dentro il mucchietto da cui li abbiamo presi ed essi torneranno ad essere quelli di prima – elementi di un insieme privo di un ordine interno. Certo, essi potrebbero essere stati incollati al pavimento al momento di disporli in fila, così da rendere difficile o impossibile riportarli nel mucchio – ma questa impossibilità fattuale non cambia il senso dell'esempio: tra la fila come forma di ordinamento e il sassolino che entra in quella forma non vi è alcun rapporto di implicazione reciproca. Ciò che ora sta in un ordine può anche stare in un mucchio.

La mano si è potuta imporre come macchina da calcolo e come insieme-modello in generale soprattuto per il fatto che l'ordine è in questo caso assai stabile: alla disposizione delle dita si aggiungeranno poi convenzioni facili da rispettare: c'è chi potrebbe considerare l'ordine dal pollice al mignolo come probabilmente farà ognuno di noi, oppure dal mignolo al pollice come farebbe un antico papua della Nuova Guinea. Al di là di un certo margine di discrezionalità si impone tuttavia un ordine che dipende dalla conformazione della mano. Nello stesso tempo potremmo dire che questo ordine è privo di una necessità interna e che le nostre dita sono in certo senso soltanto incollate sul palmo della nostra mano. Non possono essere rimesse in un sacchetto come nel caso dei bastoncini o dei sassolini – ma questa impossibilità non è connessa ad un *ordine necessario* della loro disposizione. La loro conformazione è importante, rappresenta un dato di fatto «favorevole» dal momento che in base ad essa sono resi possibili conteggi anche piuttosto complessi. Ifrah rammenta come ipotesi sull'origine della base 12 la possibilità di toccare con il pollice ogni falange delle altre quattro dita: e osserva spiritosamente che un polipo farebbe molto più fatica di noi a contare ed a escogitare metodi di conteggio nonostante l'abbondanza delle sue propaggini prensili. Ma si tratta appunto di conformazioni fattuali accidentali – e se noi ci attenessimo ad esse non riusciremmo in alcun modo a fare quel *passo avanti* che è assolutamente necessario per approdare su un terreno che meriti di essere chiamato «aritmetico».

Parlare della mano come macchina da calcolo e del corpo come origine dell'aritmetica non avrebbe senso, anzi sarebbe profondamente sbagliato se non venisse chiarita e spiegata la limitazione intrinseca – anzitutto di ordine concettuale – che è qui presente.

§ 11

Necessità di una rinnovata riflessione sul problema dell'ordine – L'idea di un ordine intrinseco – Ordine e ripetizione – Ripetizione semplice e ripetizione concatenata – Ordine intrinseco e concatenazione.

La riflessione ritorna dunque nuovamente sul problema dell'ordine. Abbiamo detto: alla base dei sistemi corporei non vi è l'idea pura e semplice di un insieme-modello a cui verrà correlato il particolare insieme da determinare. Il punto importante sta nell'unicità dell'insieme-modello, unicità che è strettamente associata all'idea della stabilità dell'ordine secondo cui i suoi elementi sono disposti.

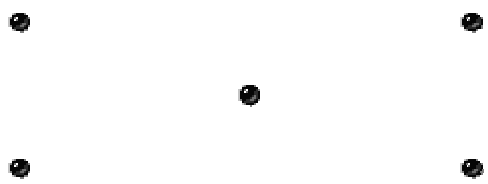
Abbiamo tuttavia attirato l'attenzione sul fatto che una stabilità fattuale – sia che dipenda dalla conformazione fisica della cosa stessa sia da qualche consuetudine consolidata (come nell'esempio degli amici del bambino che abbiamo rammentato in precedenza) – è ancora lontana dal poter proporre il *pensiero* del numero.

L'insegnamento che possiamo trarre dalle considerazioni svolte fin qui è che questo pensiero è vincolato ad un ordinamento che sia tale per ragioni *essenziali*, il che significa ad un ordinamento *necessario, a priori*. Non abbiamo nessuna difficoltà ad impiegare vecchie parole della tradizione filosofica, ma vorremmo farlo determinandone con chiarezza il contesto.

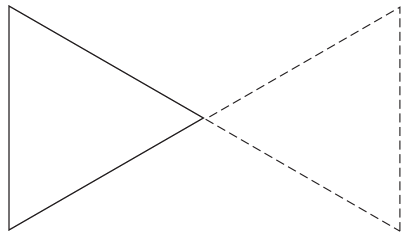
Cosicché ci chiediamo: che tipo di connessione deve sussistere tra un elemento e l'elemento successivo di una successione affinché si possa parlare di un ordine intrinseco, che sia del tutto indipendente da considerazioni empirico-fattuali? Quale condizione deve essere soddisfatta affinché un determinato elemento di una successione occupi *necessariamente* e non *occasionalmente* una determinata posizione?

Per rispondere a questa domande in realtà dobbiamo spostare la nostra attenzione proprio, e finalmente, al *problema della ripetizione*. Ad esso dobbiamo ripensare tenendo conto di ciò che abbiamo già detto, ma anche del nuovo contesto in cui il problema ci si ripresenta, che non può dare per acquisito, come potevamo invece fare in precedenza, la nozione del numero. Potremmo allora, rispettando questa consegna, richiamarci non tanto all'idea della molteplicità e degli oggetti di cui essa è costituita quanto piuttosto all'esercizio di un'azione ovvero all'esecuzione di un'operazione. Soprattutto in rapporto ad azioni o ad operazioni si parla di ripetizione. Oppure in rapporto ad eventi, i quali peraltro sono in via di principio all'interno di una processualità. Quando questo termine viene riferito ad oggetti viene implicata, più o meno debolmente, una componente dinamico-processuale, sia in quanto si tratta di oggetti che fanno effettivamente parte di eventi (come nel caso di suoni all'interno di una melodia), sia attraverso una «proiezione» che conferisce un dinamismo interno alla staticità dell'oggetto.

Quest'ultimo caso è per noi particolarmente interessante: talvolta possiamo trovare opportuno parlare di ripetizione in rapporto ad una configurazione visiva, ad esempio potremmo usare questo termine in rapporto ad una configurazione come la seguente:



Questa è una circostanza interessante perché il vedere nella figura qualcosa che si ripete significa in certo modo proiettare *l'ordine* della figura sul piano di una *operazione* possibile che la ha generata:



Se in questo caso parliamo di ripetizione, potremmo osservare che con questa parola si fa emergere un'allusione, ad esempio, ad una possibile operazione di duplicazione e di rotazione a specchio: la figura così intesa viene riarticolata e questa riarticolazione viene interpretata riportandola ad una procedura da cui essa potrebbe essere stata generata.

Si riporta l'ordine alla ripetizione. L'ordine appare come un risultato, come qualcosa che è stato prodotto, e dietro l'oggetto si intravvede un modo di realizzazione possibile della figura.

Un fascio di relazioni molto ricco e complesso collega ordine e ripetizione. Ma vi è un caso semplice che mostra esemplarmente, e in modo particolarmente forte, questo rapporto considerando unicamente la nozione dell'operazione ripetuta.

Dobbiamo notare anzitutto che ci sono almeno due modi di considerare la ripetizione di un'operazione.

Un modo è quello che potremmo chiamare la *ripetizione semplice*. Supponiamo ad esempio che un maestro proponga alla lavagna un triangolo e chieda agli allievi di ricopiarlo. Potrebbe in particolare chiedere che questa azione venga ripetuta più volte. Poiché non vi sono altre istruzioni, gli allievi potranno disegnare triangoli in qualunque parte del foglio, e in qualunque disposizione. Quindi: disordinatamente.

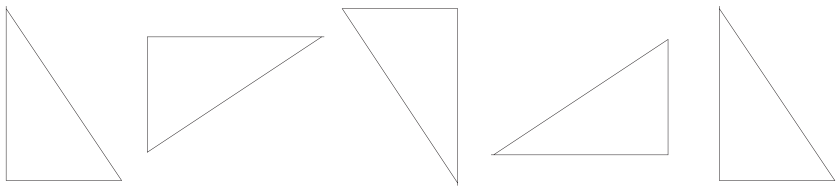
Certamente i triangoli vengono disegnati *l'uno dopo l'altro* e quindi vi è un ordine temporale della successione, ma di questo non rimane traccia sul foglio di carta e non è leggibile in esso. In certo senso esso è un ordine meramente *soggettivo* perché riguarda riguarda le azioni come tali e non il loro prodotto.

Ogni passo è chiuso in se stesso nel senso che non presuppone né l'azione precedente né quella successiva. L'oggetto prodotto potrà di conseguenza essere considerato come un oggetto a sé stante, eventualmente con relazioni di somiglianza con gli oggetti che gli stanno intorno.

Diversamente stanno le cose per quella che potremmo chiamare *ripetizione concatenata*.

Se ad esempio, l'istruzione fosse quella di copiare il modello più volte allineando i triangoli tra loro, in base a questa condizione aggiuntiva cominceremmo ad uscire dalla semplice ripetizione per il fatto che dovremmo appunto «agganciare» ciascun disegno al disegno precedente, e l'ordine non avrebbe più carattere meramente temporale ma si imprimerebbe nel disegno che assumerebbe anche, in forza di esso, un carattere ad un tempo dinamico ed unitario. Gli oggetti prodotti non saranno semplicemente a sé stanti, ma apparterebbero ad un'unità più ampia che si va dispiegando con la ripetizione.

La condizione potrebbe essere rafforzata – ad esempio stabilendo che ad ogni passo, a partire dal modello, il triangolo deve essere rappresentato ruotato a destra di 90°.



In questo caso non si può prescindere anzitutto dalla disposizione del triangolo dato come modello e ogni figura risulta fortemente concatenata alla figura precedente ed alla figura successiva. La figura fornita come modello dal maestro assume nettamente il carattere di «inizio» di una successione di figure fra loro correlate. Alla terza ripetizione dell'operazione corrisponderà una disposizione determinata tra le quattro possibili disposizioni che il triangolo può assumere.

Ogni passo è aperto al successivo e nello stesso tempo si ricollega al passo precedente. Il prima e il poi diventano irrilevanti per qualificare un'ordine che si trova ormai all'interno della serie di figure ed in dipendenza del tipo di operazione che le ha prodotte.

Vogliamo ora considerare la nozione di operazione in un'astratta generalità: in essa si distinguerà la *base* dell'operazione, che è ciò su cui essa viene esercitata, e il *risultato* dell'operazione, che è ciò che viene prodotto nell'applicazione dell'operazione ad una base. Nella possibilità di fare del risultato di un'applicazione dell'operazione la base per una nuova applicazione di essa sta tutto il concetto della ripetizione concatenata. In rapporto ad essa parleremo anche di ripetizione (iterazione) ricorsiva o di ricorsione (restringendo dunque il termine di «ricorrere», che è un possibile sinonimo di «ripetere» o «iterare»). Occorre tuttavia notare che quest'ultima espressione – che appartiene ad un'elaborazione matematica evoluta – andrà sempre intesa in stretta aderenza al nostro contesto elementare di discorso[17].

Quando si verifica l'applicazione ricorsiva di un'operazione, a partire da un unico oggetto inteso come inizio, il risultato complessivo, ottenuto in un punto qualunque dell'applicazione, sarà una successione di elementi attraversata da un ordine *intrinseco*. In effetti, essendo dato un primo elemento, ogni altro elemento è *costruito* in modo da presupporre, nella regola della sua costruzione, l'elemento precedente.

In questo contesto, le vecchie parole della nostra tradizione filosofica come *essenziale*, *necessario*, *a priori* assumono un significato pienamente comprensibile.

L'interruzione della ricorsione dovrà, a sua volta, essere ritenuta puramente «accidentale». In altri termini non vi sono ragioni di principio perché l'applicazione ricorsiva debba terminare in questo o quel punto – cosicché possiamo dire che l'iterabilità spetta all'operazione in via di principio, e ciò significa naturalmente la stessa cosa che affermare che essa è iterabile *ad infinitum*.

È interessante notare che, come in precedenza il tipo di relazione tra gli elementi del corpo non consentivano la «proseguibilità» della serie, così ora questa proseguibilità è garantita

[17] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, prop. 5.2. Cfr. G. Piana, *Interpretazione del "Tractatus" di Wittgenstein*, Guerini, Milano 1993 (II ed.), pp. 97 sgg.

ed assicurata dalla stessa idea della concatenazione. La relazione che sussiste tra un elemento della serie e l'elemento precedente assicura che dato un elemento se ne potrà sempre costruire un altro. *Si è messa in moto una macchina inarrestabile.* Questa apertura infinitaria fa parte della rete concettuale che siamo riusciti a fare emergere liberandoci dalle scorie delle nostre precedenti esemplificazioni empirico-concrete.

§ 12

Le serie ricorsive – La serie che rappresenta la forma della concatenazione – Ciò che mancava ai metodi corporei era il pensiero della concatenazione – In rapporto ai numeri si può dire che il loro essere coincide con il loro luogo – Il numero come oggettività sintattica.

Se ora volgiamo lo sguardo indietro, possiamo notare quanto strada abbiamo fatto allontanandoci dal piano dei metodi corporei. Come abbiamo osservato in precedenza, il limite di quei metodi non consisteva tanto nel fatto che la serie risultava bloccata in un numero massimo, quanto piuttosto nel fatto che questo blocco non poteva essere superato restando sul loro terreno e la sua esistenza denunciava la mancata acquisizione di una nozione autentica di numero e di serie aritmetica.

In realtà l'arresto della serie potrebbe sembrarci sorprendente e inesplicabile. Come è possibile non riuscire a effettuare un passo così semplice al di là del numero 41? Il primitivismo può essere esso stesso una ragione o non dovremmo forse di questo primitivismo cercare una ragione?

Stando al punto di vista proposto si comprende benissimo la ragione per la quale questo passo *non può* essere effettuato: infatti la serie da 1 a 41 – secondo la conta dei Papua – *non* è affatto una *serie numerica parziale* per il semplice fatto che una serie numerica parziale non esiste: se c'è una parte della serie numerica, essa deve poter esserci tutta.

Il nodo della questione sta nel fatto che l'ordine non era in quel caso un ordine «intrinseco» – tra l'uno e l'altro elemento della serie non vi era dunque un rapporto di concatenazione. Cosicché l'ordine doveva essere contenuto dal sistema corporeo come un sistema non oltrepassabile.

Ora abbiamo trovato una risposta soddisfacente proprio alla domanda intorno alla condizione che deve essere soddisfatta affinché un determinato elemento di una successione occupi necessariamente e non occasionalmente una determinata posizione. La risposta punta sulla possibilità di riportare l'ordine all'iterazione, e precisamente in modo tale da rendere conto del formarsi di un ordine intrinseco.

Un primo risultato delle nostre considerazioni è dunque il seguente: *l'ordine intrinseco è una proiezione sul piano obbiettivo-relazionale (ontologico) dell'iterazione ricorsiva dell'operazione.* Per pervenire alla serie aritmetica vera e propria (e quindi dei numeri sic et simpliciter) è tuttavia necessario fare un passo ulteriore.

Vogliamo intanto chiamare *serie ricorsive*[18] le serie i cui elementi sono connessi tra loro da una relazione di concatenazione. Tutte le serie ricorsive hanno una *forma comune* – e noi diciamo che *la serie aritmetica ovvero la serie dei numeri è quella serie che rappresenta la forma comune delle serie ricorsive*. Essa è la serie rappresentativa della forma della concatenazione in generale.

Ciò che mancava ai metodi corporei per raggiungere il terreno aritmetico vero e proprio era il *pensiero della concatenazione*. Questo pensiero diventa effettivo solo nella posizione della serie aritmetica, e questa nello stesso tempo fornisce finalmente anche quell'oggettivazione che rende possibile il parlare di numeri come oggetti.

Il numero è un oggetto in quanto può fare da sostrato a determinazioni predicative, e non in modo fittizio, secondo le *pretese riduzioni logico-grammaticali* che rappresentano un'autentica ossessione del pensiero empirista. Di un numero si può dire che esso è pari o dispari, che è scomponibile in fattori primi, che si trova in questa o quella relazione con altri numeri, ecc. Ma certamente si tratta di un oggetto molto particolare.

[18] Cfr. la nozione di «serie formale» nel *Tractatus* di Wittgenstein, prop. 4.1252 e 5.22.

L'introduzione del numero non può avvenire se non si introduce al tempo stesso la serie aritmetica. La sua «indipendenza» ha come condizione la sua appartenenza ad essa. Gli oggetti che appartengono a questa serie sono appunto i numeri, *sic et simpliciter* – non sono più numeri-di...: né *di* questo né *di* quello.

Potremmo allora dire che il numero è una *entità* la cui *consistenza d'essere* coincide con il *luogo* (posizione) che essa occupa *in forza del modo in cui essa è stata prodotta*. Perciò, come si può accentuare la solidità ontologica del numero, così se ne potrebbe accentuare l'evanescenza. Già la possibilità di parlare di un essere che è il suo luogo sembra segnalare che il numero è quasi nulla. Il numero-di... *si appoggia* sempre a qualche cosa – ad insiemi, ordini, operazioni. Ognuna di queste nozioni può presentarsi depurata da ogni componente empirico-fattuale, come una nozione puramente matematica – ma in ogni caso può trovare anche un'esemplificazione nell'esperienza percettiva. Nell'idea del numero come numero-di... la realtà stessa è presente, sia pure in uno sfondo più o meno lontano. Nella *storia fenomenologica del numero* dobbiamo prendere le mosse da quelle nozioni e precisamente dal modo in cui esse possono essere concretamente esemplificate e cadere sotto la presa dell'esperienza. Ma quando, seguendo un preciso percorso, perveniamo al numero come oggetto, in certo senso esso non si appoggia su nulla. Non trova alcun sostegno nella realtà. Rispetto al numero considerato come numero-di... è stato effettuato un vero e proprio salto: il numero si costituisce come *pura oggettività sintattica*, cioè come un'oggettività che *è* in forza della sintassi iterativo-ricorsiva che sta alla base della serie aritmetica.

ANNOTAZIONI

1. È appena il caso di dire che non ci siamo posti alla ricerca di una caratterizzazione definitoria generale del numero, una caratterizzazione cioè sotto la quale dovrebbero essere sussunti i diversi tipi di numero in generale possibili o comunque noti. I numeri di cui parliamo sono sempre i numeri cosiddetti «naturali». Questa espressione è stata evitata per via della sua equivocità: non si può dire infatti che si capisca subito quale sia la «natura» che qui viene evocata. Dopo aver

compiuto il nostro itinerario ci sembrerebbe tuttavia una buona decisione quella di dissolvere quel tanto di enigmatico vi è in questa «naturalità» nell'idea della loro primarietà «genealogica». I numeri normalmente detti «naturali» sono proprio quelli che nel percorso genealogico si incontrano per primi.

2. Si sarà certamente notato che nella nostra discussione non abbiamo fatto alcun cenno alle operazioni aritmetiche in senso usuale e in particolare all'addizione. Non avremmo dovuto dire che la serie aritmetica è generata dall'iterazione dell'operazione + 1 a partire dall'inizio 0? Si consideri allora questo punto: le operazioni aritmetiche sono operazioni con i numeri, e dunque i numeri debbono in qualche modo esserci già. La serie aritmetica non può avere origine da un'operazione aritmetica. Dal punto di vista che abbiamo assunto, si parla di operazioni in generale, e non di operazioni arimetiche; e di serie ricorsive come serie generate da operazioni ricorsive; infine della serie aritmetica come serie rappresentativa della forma della concatenazione. Solo al di là della soglia, quando abbiamo ormai a che fare con numeri, si può parlare dell'addizione come un'operazione che ha numeri come base e come risultato[19].

§ 13

Riproposizione del problema del contare – Nel contare non si sorteggiano numeri – Cardinalità, ordinalità e iteratività – Importanza fondamentale del numero iterativo nella filosofia del numero – Iterazione e apertura infinitaria – La soppressione dell'esperienza.

A questo punto possiamo finalmente dare una risposta alla domanda intorno al rapporto tra il numero e il contare che abbiamo più volte formulata e che in realtà abbiamo sempre lasciata in sospeso. Propriamente si trattava di decidere quale significato attribuire alla parola «contare» e in che modo essa possa essere

[19] Questa idea viene elaborata secondo una particolare angolatura, ricca di interesse, nella seconda parte della *Filosofia dell'aritmetica* di E. Husserl.

connessa con il numero, qualora si ammetta l'esistenza di una relazione significativa dal punto di vista concettuale.

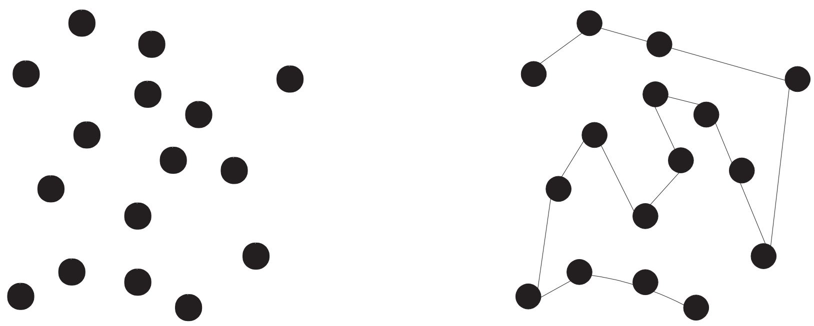
Naturalmente dipende solo da noi lo stabilire o meno di usare la parola «contare» in un'accezione tanto ampia da poter abbracciare qualunque metodo di determinazione quantitativa di una molteplicità. In questa accezione possono cadere ovviamente tutte le varianti delle procedure del metodo tanti-quanti e dei metodi corporei in genere. Analogamente saranno nomi di numeri tutti i termini utilizzati in quelle procedure per indicare le determinazioni quantitative acquisite. L'intero percorso che abbiamo compiuto fin qui mostra tuttavia che è più istruttivo riconoscere l'opportunità di operare una precisa restrizione. C'è il contare se c'è la serie dei numeri nel senso proprio del termine – ed allora contare significa essenzialmente, come è stato spesso notato, stabilire una correlazione tra la molteplicità da contare e la serie aritmetica.

Questa osservazione va tuttavia accompagnata dalla consapevolezza che la formazione di una serie aritmetica, e quindi il concetto di numero, concresce all'interno della crescita stessa del problema del contare. Ma questa precisazione non basta ancora: il parlare di una correlazione tra la molteplicità da contare e la serie aritmetica può indurre nell'equivoco di intendere il contare come un'applicazione del metodo del tanti-quanti che si ripresenterebbe dopo la costituzione della serie. In tal caso il procedimento del contare viene frainteso in ciò che esso ha di più caratteristico, e cioè nel riferimento alla serie numerica come rappresentativa della forma della concatenazione.

La proposizione fondamentale della filosofia del numero potrebbe essere: i numeri non si possono mettere in disordine.

Ciò ha naturalmente strettamente a che vedere con un preciso modo di intendere il processo del contare. Nel contare non si gioca a tombola. Non vi è da un lato un sacchetto di sassolini e dall'altro un sacchetto di numeri; i numeri con cui si conta non vengono estratti a sorte, come potrebbe accadere per un qualunque insieme-modello. Dunque nel contare non vi è nessun metodo del tanti-quanti. Il contare è interamente determinato dalla presenza dell'ordine e precisamente da un ordine che ha la forma della concatenazione, anche se questa presenza si consuma all'interno del processo stesso. Non solo i numeri debbono essere «presi» nell'ordine che spetta loro, ma questa circostanza fa sì che alla molteplicità da contare sia *prestato* un ordine provvisorio, che è *il percorso tracciato dallo stesso processo del contare*, nel quale ogni elemento della molteplicità dovrà mantenere provvisoriamente quel posto che il contare gli ha assegnato almeno fino al termine del conteggio. Si conta appunto *dal primo elemento all'ultimo*.

Riprendiamo da Ifrah le due figure che egli propone molto opportunamente per illustrare questo punto[20]:



La cardinalità viene determinata attraverso l'ordinalità, l'ordinalità rimanda all'iterazione ed il contare in questa accezione ristretta presuppone la costituzione del numero come oggettività e nello stesso tempo come costruzione iterativa. Il numero-di-volte, che così raramente viene rammentato nella filosofia del numero assume, all'interno della nostra esposizione, un'importanza fondamentale nel rendere conto del problema dell'ordine e della forma di concatenazione – e dunque della formazione della serie aritmetica. Non è naturalmente irrilevante il fatto che abbiamo voluto parlare di numero-di-oggetti, del numero-di-posizione e del numero-di-volte prima di parlare del numero sic et simpliciter. E che poi nel corso della nostra discussione siamo in certo senso invitati a ripercorrere a ritroso quelle distinzioni iniziali.

[20] G. Ifrah, *op. cit.*, p. 41.

Risulta infine confermato e ribadito che, se il problema del contare viene correttamente affrontato, è possibile isolare con chiarezza le componenti che hanno un puro interesse antropologico o psicologico da quelle che non riguardano la mera empiria degli impieghi numerici. In effetti laddove ci sembra interessante fare riferimenti a questa empiria, come anche noi abbiamo fatto, ci troviamo ben oltre le pura curiosità e l'aneddotica, perché all'interno di questi materiali sono leggibili i problemi di una «storia» che racconta molte cose intorno allo statuto *teorico* del numero. In questa storia si vede anche in che modo riusciamo finalmente a liberarci dalle pastoie dei dati intuitivi, dai riferimenti materiali, dal rapporto con l'immediatezza e la concretezza.

Occorre indugiare a lungo presso il concreto per comprendere a fondo quanto lontano possa andare il pensiero astratto, e quanto siano ristretti i limiti dell'«intuizione».

Come abbiamo visto in precedenza, possiamo affermare che la serie aritmetica non è realmente acquisita, pur essendo in possesso di svariate tecniche di conteggio nel senso lato del termine e di una terminologia per i numeri relativamente evoluta, se queste tecniche sfociano infine nel «molti», nella numerosità indeterminata da cui abbiamo preso anzitutto le mosse. Al di là di un certo limite di chiarezza quantitativa distinguibile si ripiomba nella confusa indeterminatezza del modello percettivo del «molti», l'intrico della foresta, il mucchio di sabbia. In tali condizioni il numero non c'è: la serie non è in grado di continuare. *Perciò* non è un'autentica serie aritmetica.

Il passaggio che mostra che gli argini dei riferimenti concreti sono stati rotti è l'illimitatezza di principio delle iterazioni, ed ancora più precisamente il fatto che siamo qui alla presenza di qualcosa di simile ad un processo ideale che ha in se stesso il principio del proprio movimento. Le operazioni sono iterabili «infinitamente» – il che significa anzitutto che, se una certa regola è stata una volta applicata, allora potrai applicarla ancora una volta, e poi ancora una volta, ed un'altra ancora... Potrai: non *proprio tu*, non *io* – in *questa o quella* situazione concreta. *Si* potrà, in generale: si tratta di una possibilità fondata sul legame concettuale che unisce l'idea della operazione all'idea di un ancora-una-volta ecceterato.

Con questo passaggio infinitario il piano dell'empiria è certamente oltrepassato: viene in generale *superato* il piano dell'esperienza per essere mantenuta soltanto la *componente strutturale liberata dalle sue limitazioni fattuali.* Il numero è in certo senso annidato nelle pieghe delle molteplicità concrete, degli ordini empirici, delle configurazioni ghestaltiche, delle operazioni effettuate, delle regole iterativamente applicate. Ma quando esso viene di qui estratto deve presentarsi come pura *costruzione logica* – cioè come una costruzione che è faccenda soprattutto del pensiero, non dell'esperienza o dell'intuizione. Secondo il senso delle nostre considerazioni l'elemento intuitivo non si trova in una semplice contrapposizione all'elemento logico, così come ciò che è discorsivo si contrappone al non-discorsivo. L'importante vincolo tra logica e discorso non esaurisce l'ampiezza di senso della parola «logica», ed inversamente il riferimento all'intuizione intesa unicamente come mera comprensione non-discorsiva non può che essere considerato fortemente fuorviante e riduttivo.

Attraverso la percezione non si colgono soltanto degli enti: si colgono anche processi, andamenti, tendenze, rapporti, relazioni, strutture in generale. Queste strutture possono essere apprese con le loro determinatezze empiriche, ma anche all'interno di funzioni ideative che attenuano la forza di queste determinatezze e accentuano invece ciò che in esse appartiene all'ambito delle pure possibilità, quindi ad un ambito a cui la parola «logico» può già cominciare ad essere applicata.

Nello stesso tempo, quando ciò accade stiamo già scivolando al di fuori del campo di ciò che è direttamente sperimentato, l'oggetto o la relazione direttamente colta (ed in questo senso «intuita») tende a sottrarsi a questa presa per entrare nel campo gravitazionale del pensiero puro – ed eventualmente ad esserne interamente assorbita. L'esperienza dovrà alla fine essere superata e soppressa. Questo tema del superamento ed anzi della soppressione dell'esperienza[21] rappresenta una delle mète

[21] Si tratta di un tema husserliano che è stato spesso trascurato dalla letteratura fenomenologica (cfr. G. Piana, *La notte dei lampi*, Guerini, Milano 1988, pp. 165-66).

importanti del nostro percorso epistemologico. Certamente è un compito squisitamente filosofico riportare alla memoria questa esperienza soppressa. E tuttavia essa, come è suggerito dal termine tedesco di *Aufhebung*, viene in qualche modo ancora mantenuta, sia pure in lontananza e nell'oblio. La filosofia è un'arte del ricordo. Ma vi è in ogni caso anche qualcosa di profondamente giusto nell'idea, che si ripropone di continuo, di una scienza che deve in qualche modo «liberarsi» dalla filosofia. È come liberarsi dai ricordi – e questo è spesso necessario per procedere oltre.

§ 14

Qualunque numero deve poter avere un nome – Che cosa è una denominazione sistematica per i numeri – La notazione-tratto.

Nelle nostre considerazioni iniziali avevamo segnalato come la parola «numero» possa anche indicare ciò che dovremmo chiamare più propriamente «nomi dei numeri» – cioè dei segni o dei simboli che rappresentano numeri, quindi le cifre. Con questo termine si possono intendere sia le cifre elementari di cui si serve un determinato sistema di notazione sia i segni composti attraverso di esse – in ogni caso si tratta sempre del livello segnico-notazionale.

Se ad esempio chiediamo che vengano scritti dei numeri sulla lavagna, intendiamo evidentemente le cifre. Il numero in sé non può apparire intorno a noi tra le cose di questo mondo. La cifra scritta sulla lavagna è la sua rappresentazione nell'ambito di un simbolismo.

Dovremmo allora recriminare sulle imprecisioni e imperfezioni del linguaggio comune che stenta sempre a distinguere il designante dal designato, il simbolizzante dal simbolizzato – e che usa la stessa espressione ora per indicare l'oggetto ora per indicare il suo nome?

Al contrario, io credo che questo sia un buon esempio che mostra come queste recriminazioni siano giustificate solo secondo i casi. Talvolta le equivocità del linguaggio corrente sono indizi che vanno accolti ed esplorati a fondo proprio perché possono insegnarci qualcosa. In questo caso l'equivocità potrebbe suggerire di esaminare meglio come stiano le cose per ciò che concerne il rapporto tra simbolo (segno) numerico e il numero che esso rappresenta.

È possibile infatti che tra l'una e l'altra cosa sussista una sorta di reciproca coappartenenza che potrebbe rendere difficile, se non impossibile separarne i destini.

In effetti, quando il rapporto designativo sussiste in forza di una pura e semplice convenzione, simbolizzante e simbolizzato stanno l'uno al di fuori dell'altro come la parola «foresta» rispetto alla foresta o come un nome proprio rispetto al portatore del nome. E perché mai ciò non dovrebbe valere anche per i «nomi dei numeri»? Sembra ovvio che la parola «tredici» non abbia nulla a che fare con il numero corrispondente – un altro nome sarebbe altrettanto possibile, e d'altronde nelle diverse lingue avremo nomi differenti.

Ciò lo si potrà dire – *forse* – anche per le *cifre* vere e proprie, ad es. per la cifra «13». Anche qui la forma del segno non è obbligatoria, ed un'altra convenzione segnica potrebbe essere utilizzata in luogo di questa. Ma qui siamo tentati da un «forse» che ha il suo peso. Tutti sappiamo infatti che i metodi notazionali evoluti, per quanto possano essere diversi, sono caratterizzati da un *ordine sistematico* in base al quale *qualunque numero* può avere un nome. Nell'esempio non è obbligatoria la forma delle cifra 1 e della cifra 3, e ciò vale in generale per le cifre da 0 a 9. Ma per il resto il nome verrà costruito in base ad una regola in modo da poter ottenere un segno per ogni possibile elemento della serie aritmetica. Si comprende a questo proposito, da un diverso punto di vista, come sia importante distinguere tra una serie aritmetica autentica ed una serie pseudo-aritmetica che termina nel «molti». In questo caso possono bastare designazioni convenzionali, si tratti di segni scritti oppure di gesti che possano essere in grado di contrassegnare determinazioni quantitative realizzate su molteplicità di oggetti.

Nel caso della serie aritmetica vera e propria invece si pone il problema di una *denominazione sistematica*: si tratta cioè di indicare un metodo in base al quale ogni numero producibile all'interno della serie possa essere designato in modo chiaro e distinto. Nel porre questo problema non vogliamo saltare nel bel mezzo della soluzione proponendo la risposta che tutti sanno. Questa risposta risaputa ce la vogliamo riguadagnare compiendo il tragitto teorico necessario, a partire dal primo passo.

Questo consisterà probabilmente in una proposta di costruzione del segno numerico che non faccia altro che *rispecchiare* il modo di costruzione del numero stesso. Si tratterà dunque di una procedura che produca i segni numerici secondo la forma della concatenazione ricorsiva.

Questa procedura potrebbe essere presentata nel modo seguente: anzitutto abbiamo bisogno di un segno che potrebbe il nostro ben noto segno 1. Ci è poi utile poter disporre di un segno in rapporto al quale sia predisposta una regola di sostituzione. Tale segno sia x. Naturalmente questi segni potrebbero essere sostituiti da altri qualsiasi.

Ciò premesso stabiliamo un inizio ed una regola:

INIZIO: x
REGOLA: x→1x

Non vi è evidentemente bisogno di altro per generare in sequenza 1x, 11x, 111x, 1111x, ecc. Poiché stiamo giocando a carte scoperte, sappiamo già che il segno 1 è nome del numero uno, e si comprende subito che cosa accadrà nell'applicazione iterata della regola. Il criterio che abbiamo enunciato in precedenza – che la produzione dei segni numerici rispecchi la produzione dei numeri – viene indubbiamente rispettato. Inoltre possediamo una denominazione sistematica per un elemento qualsiasi della serie aritmetica. Attraverso questa notazione, che potremmo chiamare notazione-tratto, il numero – e proprio il numero inteso come oggettività ideale – è ritornato in qualche modo a far parte del nostro mondo circostante dopo una lunga vicenda che aveva preso le mosse dalle molteplicità concrete. Esso si appoggia nuovamente a qualcosa – al segno stesso che lo rappresenta e che è appunto un oggetto visivo come qualsiasi altro.

Eppure appare subito subito chiaro che con la notazione-tratto, raggiungiamo un esito del tutto insoddisfacente, ed anzi paradossale. Il paradosso che impedisce di considerare una cosa simile come una notazione per i numeri è che i tratti di cui deve essere composta ogni singola cifra debbono essere contati per poter essere riconosciuti. Per i primi elementi della serie delle cifre potremo cercare di afferarrare le differenze a «colpo d'occhio» – regredendo così allo stadio più primitivo della storia del concetto di numero. La notazione si autosopprime. Di fronte a noi vi è di fatto niente altro che una molteplicità.

Una rappresentazione per il numero deve poter essere utilizzabile, e dunque dominabile – ed una rappresentazione come quella precedente non è *dominabile* già per il fatto che non è *perspicua*.

Nessuna notazione che non sia intuitivamente dominabile è una buona notazione. Non lo è *mai* dal punto di vista «pratico», della sua maneggevolezza; e *talvolta* non lo è nemmeno dal punto di vista delle giuste esigenze della teoria. Nel nostro caso, la notazione è ovviamente impraticabile, ma è anche inaccettabile dal punto di vista concettuale per il fatto che *la differenza tra i numeri non trova manifestazione adeguata nella loro rappresentazione*.

Ma se questo esito paradossale è stato ottenuto attraverso l'idea di un rispecchiamento, allora l'esigenza di una notazione adeguata, che si propone come una esigenza che non viene affatto dall'esterno, ma anzi dal cuore stesso del problema, deve essere soddisfatta secondo una direzione che è essenzialmente diversa da quella che termini come «rispecchiamento» e «adeguatezza» suggeriscono. Numero e notazione del numero non stanno probabilmente l'uno di fronte all'altro, come se vi fosse di là il concetto e di qui il segno, e dall'uno all'altro un mero rapporto statico di designazione. Vi è piuttosto una interazione tra il segno e il concetto, in modo tale che il concetto suggerisce un segno, ma il segno a sua volta suggerisce nuovi pensieri, e la stessa formazione del concetto procede oltre, su una strada che comincia a serpeggiare tra il numero e la sua rappresentazione.

§ 15

I numeri distributivi e l’idea di una base – La domanda «Quanti per volta?» – Ai metodi additivi manca l’idea di grande unità ottenuta ricorsivamente – Intreccio tra concetto e rappresentazione – Grande unità, ricorsione e notazione posizionale.

Questo intreccio diventa chiaramente visibile nella questione della base. Si tratta infatti di un’elaborazione della tecnica elementare del conteggio che da un lato interviene a livello concettuale e dall’altro mette in questione il piano simbolico notazionale.

Ripensiamo al filo conduttore linguistico che ci ha permesso di parlare di numeri cardinali, ordinali e iterativi. In quella nostra discussione avevamo omesso un altro caso interessante di forma espressiva relativa ai numeri registrata dalla grammatica corrente. Si tratta di espressioni del tipo «a due a due», «a tre a tre» ecc., ovvero dei numerali detti correntemente «distributivi». In latino, oltre *Quot? Quotus? Quoties?*, il «quanti» assume anche la forma del *Quoteni?* ovvero del «Quanti per volta*?*». Le risposte richiederanno poi l’impiego di parole numeriche particolari come *singuli*, *bini*, *terni*, *quaterni*, ecc.

Naturalmente è qui implicato il problema di un’operazione di raggruppamento, ma non nel senso da implicare una molteplicità *data*, che viene in qualche modo concretamente divisa, ad esempio in cinque parti. Il conteggio con cui si risponde al «*Quanti per volta*?» può ovviamente iniziare anche se non la molteplicità a cui ci si riferisce non è attualmente presente nella sua totalità.

Nello stesso tempo il numero in quanto numero-di-oggetti ritorna all’interno del nostro problema.

Se, data una certa molteplicità, debbo prendere da essa quattro elementi per volta, conterò anzitutto fino a quattro (possiamo in proposito pensare anche anche un modo primitivo di «conteggio»), ed opererò in questo modo un primo raggruppamento, e poi ancora fino a quattro, ed opererò un secondo raggruppamento, e così via. Perciò svolgono qui una parte essenziale anche il numero ordinale e il numero di volte. Il numero di volte riguarda l'operazione del conteggio e il conseguente raggruppamento – e sappiamo già che vi è una connessione di principio tra ordine e iterazione.

Le considerazioni sulla base per una notazione numerica possono benissimo essere introdotte a partire dal numero distributivo. Ma le idee di cardinalità e di ordinalità, che sono qui coimplicate, si ripresentano in un nuovo quadro concettuale. In realtà può accadere che si parli di decine o di dozzine restando tuttavia sul piano dei raggruppamenti senza che si affacci l'idea di una base per un sistema numerico. Affinché si possa parlare di una base è necessario che il «quanti per volta» assuma il carattere di una nuova *grande unità* e che le grandi unità si possano distinguere per *livelli di ordine differenti*. Dodici dozzine è una unità di secondo livello così come una dozzina è una unità di primo livello e gli elementi singoli di questa stratificazione potranno essere dunque considerate unità di livello 0. L'iterazione genera una stratificazione ordinata di livelli in rapporto alle «grandi unità».

Queste sono considerazioni che riguardano il piano propriamente concettuale della questione. Ma queste considerazioni si sviluppano strettamente a ridosso del problema notazionale. Il concetto di numero nasce da una prassi. E questa prassi non potrebbe nemmeno cominciare ad essere esercitata se non si avvalesse di rappresentazioni. Questa istanza rappresentativa e i problemi ad essa collegati si fanno sentire già nel contare nel senso più lato e più lontano dalla serie aritmetica vera e propria e dal numero come costruzione logica. È interessante tuttavia notare che anche nei modi impropri del conteggio che terminano nel «molti» spesso si propongano forme gestuali di rappresentazione – cifre gestuali, per così dire – oppure parole di numero che presuppongono un raggruppamento.

Presso un popolo dell'Oceania in cui il due si dice *okasa*, il quattro si dice *okasa-okasa*, il sei *okasa-okasa-okasa*. Poiché l'uno si dice *urapun*, come si dirà il tre e il cinque può essere lasciato indovinare al lettore. Ma giunti al 7 ed oltre, tutto è *ras* ovvero *molti*.

Questo è un esempio molto interessante. Non sembrerebbe tuttavia opportuno parlare in casi come questi (e ve ne sono moltissimi) di sistemi con base due, per il fatto non vi è qui ancora una nozione pregnante del contare e tanto meno vi può essere una nozione propria della base[22].

Eppure questo dato storico-antropologico ha certamente interesse per la storia fenomenologico-ideale del numero. Affiorano infatti già qui due spunti fondamentali per la formazione dell'idea della base: le entità singole vengono *raggruppate,* il raggruppamento viene *iterato* in modo da dare luogo ad un *metodo sistematico di costruzione dei nomi*. I nomi dei numeri debbono essere prevedibili – il nome di un numero deve in certo modo esserci già prima che si sia mai manifestata un'occasione per il suo impiego. Oppure: il nome di un numero deve poter essere indovinato – come abbiamo fatto or ora. Entro certi limiti ciò accade nell'ultimo esempio, ma questi limiti sono limiti pratici e concettuali insieme – gli uni stanno, per così dire, dentro gli altri.

La forma rappresentativa è ancora guidata dalla *Gestalt* percettiva della coppia e siamo ancora lontanissimi da una nozione autentica del contare; ed altrettanto lontani da una nozione vera e propria di base.

Ciò che manca non è il raggruppamento come tale, ma il pensiero delle «grandi unità» ottenute per iterazione ricorsiva.

Consideriamo più attentamente questo punto. Dobbiamo immaginare che il problema del raggruppare e di una notazione per il raggruppamento si sia posto ben presto nella storia del numero. Si tratta di un problema connesso all'impiego del numero, che a sua volta fa tutt'uno con l'impiego di una notazione per il numero.

Prendendo le mosse dalla notazione-tratto, si potrà anzitutto ricorrere a segni per i raggruppamenti che saranno intesi come abbreviazioni dei segni-tratto corrispondenti. Ad una determinata molteplicità di tratti (ovvero di segni «1») si sostituisce un segno singolo speciale, facilmente riconoscibile, con chiaro vantaggio in rapporto alla perspicuità. I segni singoli potranno essere giustapposti esattamente come i tratti della nota-

[22] Ho tratto questo esempio da G. Buffa, *Fra numeri e dita*, Zanichelli, Bologna, 1986, p. 21.

zione elementare. Per questo motivo si parla in generale di metodi notazionali di tipo additivo. Questi stessi segni potranno poi essere raggruppati e sostituiti con un segno singolo, e questo modo di procedere potrà essere ripetuto un certo numero di volte. Al di là di un certo limite tuttavia il segno numerico ridiventa percettivamente non dominabile.

Ad esempio

11111 può essere sostituito con A
AA può essere sostituito con B
BBB può essere sostituito con C

Cosicché il numero 25 sarà rappresentato, ad esempio, da BBA. In questo tipo di metodo vi è una componente iterativa così come una tendenza alla gerarchizzazione, e dunque all'ordine. Questo metodo notazionale ha la caratteristica, verso il basso, di operare una differenziazione necessaria rompendo l'omogeneità «intrasparente» dei tratti, ma verso l'alto, esso opera una moltiplicazione dei segni che a sua volta non può che riproporre in altro modo una situazione di non perspicuità e di indominabilità. I segni via via nuovamente introdotti dal punto di vista della loro conformazione, seguono un *principio di differenziazione qualitativa*, quindi ancora un criterio puramente ghestaltico.

Naturalmente le cose, dal punto di vista concettuale, non migliorebbero di molto se vi fosse coerenza nel raggruppamento, ad esempio scegliendo un unico «criterio» numerico del raggruppamento, e dunque qualcosa che assomiglierebbe ad una «base».

Infine l'ordine e la disposizione dei segni non ha importanza. Il numero 25, a meno di speciali convenzioni aggiuntive, potrebbe essere espresso indifferentemente dai segni BBA, BAB, ABB. Il momento della gerarchizzazione, e quindi del livello di ordine dei raggruppamenti, è qui estraneo sia alla formazione del concetto che a quella del segno. I livelli non sono generati secondo la logica interna della concatenazione, ma si presentano in forma molto debole sulla base della circostanza ovvia che un'abbreviazione segnica presuppone che sia già stato introdotto il segno che viene abbreviato. Naturalmente sono possibili convenzioni restrittive o prescrizioni che impediscano o ostacolino la confusione. Vi saranno regole nella disposizione dei segni. Ad esempio, nella notazione romana il segno «I» cambia completamente di senso se viene messo a sinistra o a destra del segno «V». In generale i segni saranno letti in una unica direzione, da sinistra a destra o da destra verso sinistra. Ma queste convenzioni sono appunto soltanto convenzioni e non vi alcun rapporto di interdipendenza tra simili norme per le disposizioni segniche e il modo in cui si forma il concetto di numero.

Il passaggio dalle notazioni additive a quelle posizionali non può perciò essere inteso soltanto come un passo avanti nella maneggevolezza e nella praticabilità. Esso è invece strettamente connesso con la riproposizione, ad un nuovo livello, della forma della concatenazione e della procedura ricorsiva che genera la serie aritmetica.

Ciò che abbiamo chiamato prima «grande unità» è qualcosa di diverso da un raggruppamento e dalla giustapposizione additiva di raggruppamenti per il fatto che le grandi unità vengono prodotte all'interno di una procedura ricorsiva che ripete ad un livello più alto la procedura che genera la serie aritmetica rappresentata dalla notazione tratto.

La prima novità importante che qui si introduce è che i segni non si moltiplicano «verso l'alto» in una proliferazione a piacere di configurazioni segniche differenti. Al contrario le unità di ordine superiore sono costituite dalle stesse cifre elementari. La percezione deve limitarsi ad effettuare il riconoscimento di queste cifre, ed a riferire l'ordine della loro disposizione presentato sul piano segnico alle differenze di livello delle unità sovraordinate. Esistono naturalmente ancora ampi margini per la convenzione, ma essa deve rispettare tutte le condizioni che fanno parte di una costruzione del segno che è diventata sempre più interna alla costruzione del concetto.

Tanto interna che il tentativo di proporre l'intero problema sul piano della mera costruzione segnica potrebbe risultare molto istruttivo, come sintesi e conferma di ciò che stiamo sostenendo. Dovrebbe allora diventare chiaro non soltanto il sussistere di una rete di relazioni tra i vari tipi di numeri e le nozioni connesse (molteplicità, ordine, operazione, iteratività, distributività), ma anche il fatto che avremmo sempre in realtà a che fare con unità, benché di ordine superiore.

Si consideri, per semplicità, un sistema a base binaria. Dovremo allora distinguere tra le cifre elementari o semplici, che saranno in questo caso due, e le cifre generate per composizione delle cifre semplici. Si noti che essendo due le cifre elementari, una di esse dovrà necessariamente designare l'unità, mentre l'altra cifra dovrà essere considerata equivalente nel suo senso a «nessuna unità». In altri termini una delle due cifre dovrà caratterizzare un posto vuoto[23]: da essa veniamo informati che nessuna unità occupa una certa posizione. Possiamo scegliere per entrambe le cifre una forma figurale qualunque, ma sarà ovvio optare per segni 1 e 0. La procedura di produzione dei segni potrebbe essere sintetizzata nel modo seguente:

INIZIO 1x
PRIMA REGOLA x →0x
SECONDA REGOLA x →1x

Vi sono qui due regole che debbono essere applicate l'una dopo l'altra nell'ordine in cui sono qui proposte per ciascun successivo elemento prodotto dalla procedura. L'applicazione delle regole genera dunque una coppia per ciascun elemento prodotto e una lista di coppie per ogni livello di iterazione.

La prima base per l'applicazione della regola è naturalmente 1x che rappresenterà il livello zero.

Di qui si trae, in forza della prima regola, 10x e, in forza della seconda regola, 11x. Questa coppia rappresenta il primo livello di iterazione e rappresenterà la base per una nuova applicazione delle due regole a ciascun elemento di essa e ottenendo per ogni segno una coppia di segni.

Avremo dunque 100x, 101x, 110x, 111x – e questo risultato rappresenterà il secondo livello di iterazione. Il terzo livello di ite-

[23] Il segno «0» venne appunto introdotto nell'aritmetica indiana come segnaposto per una posizione non occupata. In luogo di una semplice spaziatura che generava equivoci nei calcoli, si cominciò ad usare un contrassegno per essa.

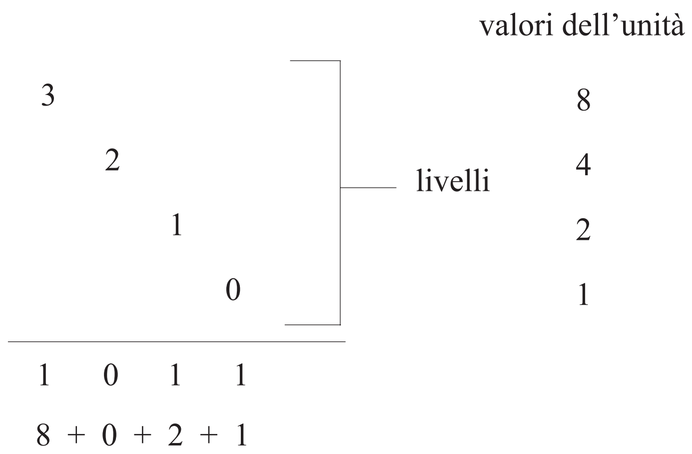
razione, ottenuto a partire da quest'ultimo esibirà la lista 1000x, 1001x, 1010x, 1011x, 1100x, 1101x, 1110x, 1111x, e così via.

Per ciò che riguarda l'interpretazione in termini numerici dei segni così prodotti ci troviamo ancora una volta di fronte al rapporto tra ordine e numero di volte, in base al quale viene interpretata la posizione e dunque il «valore» da attribuire all' «unità».

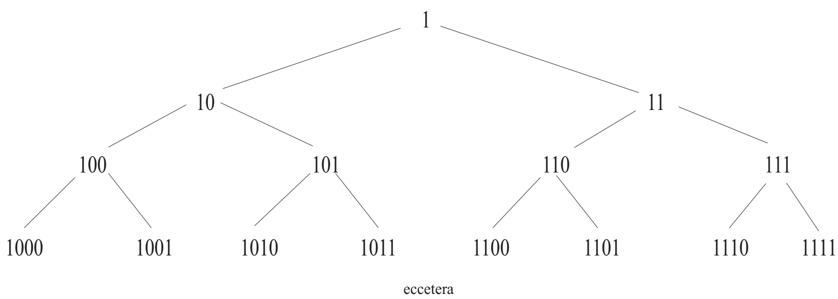
Si riconsideri quanto detto or ora alla luce dello schema seguente, dove la x è stata soppressa, dal momento che essa rappresenta soltanto un artificio calcolistico interno alla procedura. Alla sinistra abbiamo segnalato il valore dell'unità ai vari livelli in termini di esponente – ma questo *solo per rammentare la consueta formula matematica delle basi*. Di fatto nello spirito della nostra esposizione, come non si effettuano addizioni sul piano della forma notazionale dei tratti, *così non si effettuano operazioni di moltiplicazione o di elevazione alla potenza*. Il problema invece è quello di un *conteggio per grandi unità ottenute per ricorsione*. L'attenzione deve essere richiamata sull'ordine e sulla ripetizione ricorsiva, che sono gli elementi fondamentali che si rispecchiano nella posizione della cifra elementare all'interno della cifra composta.

1	livello 0	(2^0)
10 11	livello 1	(2^1)
100 101 110 111	livello 2	(2^2)
1000 1001 1010 1011 1100 1101 1110 1111	livello 3	(2^3)
eccetera		

Il segno 1 cambia di senso secondo il livello iterativo a cui appartiene, livello che è leggibile nella sua posizione. Il segno 0 indica a sua volta che non esistono unità nel livello iterativo indicato dalla sua posizione. Così la cifra 1011 verrà intesa nel modo seguente:



Possiamo anche presentare la derivazione dei segni attraverso una struttura ramificata come già fece a suo tempo Leibniz proprio in rapporto alla notazione binaria.



Nel caso del sistema decimale la procedura resta esattamente la stessa, come per ogni altra base. Aumenta solo, di poco, la complessità di questo nostro modo di presentare il problema[24].

[24] G. W. Leibniz, *Dell'organo o grande arte del pensare*, in *Scritti di logica*, tr. it. di F. Barone, Zanichelli, Bologna 1968, p. 204: «Non sto a sottolineare gli immensi pregi che derivano dall'impiego di questa progressione; sarà sufficiente notare con che mirabile metodo si esprimono in tal modo tutti i numeri mediante l'Unità e il Niente»

ANNOTAZIONE

È interessante ripetere le considerazioni precedenti dando ad esse la forma di una possibile procedura capace di generare i diversi sistemi numerici che si avvalga unicamente di regole di sostituzione per segni e della ripetizione della loro applicazione.

L'essenziale per la procedura di un sistema a pseudobase unaria è già stato detto.

Siano date una lista iniziale L1 formata dal segno x che abbiamo convenuto di utilizzare come segno per una sostituzione possibile ed un' unica regola di sostituzione di x con 1x, il risultato che otteniamo alla prima applicazione sarà ovviamente 1x che aggiungeremo alla lista L1 ottenendo L1= {x, 1x}.

Da questa lista eliminiamo il primo elemento, quindi x, in modo che la seconda applicazione della regola di sostituzione possa avvenire sul risultato della prima applicazione. Otterremo dunque nella seconda applicazione la stringa 11x che verrà aggiunta alla lista L1; da questa verrà eliminato il primo elemento, e così via.

Nel linguaggio del noto programma *Mathematica* della Wolfram Research si avrebbero le seguenti righe di codice:

```
BaseUno[k_] :=
{
L1={"x"};
Do
[
{L1 = Append[L1, StringReplace[First[L1], {"x"->"1x"}]],
L1 = Drop[L1, 1], {k}
];
L1
};
```

Scrivendo L1 nella penultima riga si stabilisce che L1 sia l'output a video della procedura.

Cosicché ad esempio l'istruzione:

BaseUno[4]

porrà in output 1111x (la x può naturalmente essere eliminata). Si noti che mentre k è un *iteratore* (il numero di volte in cui vengono applicate le regole e le istruzioni connesse), l'output è una pura e semplice stringa, quindi una mera costruzione grafica, che potrà ovviamente avere un' interpretazione numerica.

La relativa complicazione con cui presentiamo ora la notazione-tratto ha le sue ragioni nel fatto che un sistema numerico di una base qualunque può essere prodotto esattamente nello stesso modo. Consideriamo nuovamente un sistema a base binaria.

La procedura per la produzione di cifre del sistema binario assumerebbe questa forma:

```
BaseDue[k_] :=
{
L1 ={"1x"};
Do
[
{L1    =    Append[L1,StringReplace[First[L1],    {"x"-
>"0x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"->"1x"}]],
        L1=Drop[L1,1],}, {k}
];
       L1
};
```

Le regole di sostituzione sono ora due e debbono essere realizzate nell'ordine. Esse si applicano sempre al primo elemento di L1 e i risultati vengono aggiunti alla lista L1, alla quale, ad ogni iterazione, viene tolto il primo elemento. In breve ad ogni iterazione le ultime due cifre della lista sorgono dal risultato dell'applicazione ordinata delle regole alla prima cifra della lista L1.

È appena il caso di dire che per il sistema a base dieci avremo bisogno di dieci regole e che la lista L1 sarà inizialmente rappresentata dalla sequenza da 1 a 9. Per il resto il meccanismo di generazione delle cifre resta esattamente lo stesso.

```
BaseDieci [k_] :=
{
L1 ={"1x", "2x", "3x", "4x", "5x", "6x", "7x", "8x",
"9x"};
Do
[
{L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1], {"x"-
>"0x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"->"1x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1], {"x"-
>"2x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"->"3x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1], {"x"-
>"4x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"->"5x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1], {"x"-
>"6x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"->"7x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1], {"x"-
>"8x"}]],
L1 = Append[L1,StringReplace[First[L1],{"x"->"9x"}]],
L1=Drop[L1,1],}, {k}];
L1
};
```

Ad ogni iterazione vengono ora prodotte dieci cifre attraverso l'applicazione delle dieci regole nell'ordine dato alla prima cifra di L1. Naturalmente L1 fa parte del «motore» della procedura, ma è invece secondario il fatto che proprio questa lista rappresenti l'output a video. È possibile, ad esempio, conservare in una lista L2 tutti i primi elementi che vengono via via eliminati da L1 ed in tal caso l'unione tra L2 e L1 ci darà nell'ordine, per ogni sistema, tutte le cifre prodotte ad una determinata iterazione. L'ultimo elemento di L2 potrà fornirci la stringa corrispondente all'iteratore, cosicché la procedura può anche essere utilizzata come una procedura di conversione dal sistema a base dieci ad altri sistemi.

L'interesse di tutto ciò non sta in questi possibili aggiustamenti e varianti, ma nel fatto di generare come pure "cifre" i numeri di sistemi di una base qualsivoglia senza impiegare alcun calcolo aritmetico vero e proprio, ma unicamente attraverso la ripetizione ricorsiva di regole di sostituzione.

§ 16

Considerazioni sui calcoli aritmetici nel senso comune del termine – Il calcolo e la macchina – La possibilità di un uso generalizzato del termine di «calcolo» (algoritmo) – Il calcolo come manipolazione di segni secondo regole – La singolare vicenda della parola «assioma» – I segni come figure – Pensieri e segni – Passaggio dal numero alla figura.

Non appena si pone il problema del numero all'interno del contare si pone nello stesso tempo il problema della sua rappresentazione, ed in una forma peculiare, dal momento che non si tratta soltanto di escogitare dei «nomi» intesi come pure etichette verbali o grafiche.

Tra livello segnico e livello concettuale si impone ben presto un rapporto di interazione reciproca. Per questo si può trovare significativo il fatto che, nel linguaggio corrente, la parola «numero» possa indicare sia il segno che il concetto – anche il significante oltre che la cosa stessa significata.

Di qui possiamo trarre un'importante conseguenza: se è possibile trasmettere sul piano segnico-simbolico relazioni e rapporti che si trovano sul piano concettuale, allora possiamo pensare, inversamente, che relazioni e rapporti istituiti anzitutto sul piano segnico-simbolico possano essere trasferiti su quello concettuale.

Nello stesso tempo, per quanto a tutta prima ciò possa sembrare paradossale, è proprio in forza di questa interazione, e quindi di questa peculiare implicazione semantica del segno, che si può imporre in questo campo un punto di vista secondo il quale si può «prescindere dal significato» dei segni, un punto di vista che dunque può essere ritenuto una possibilità inerente alla cosa stessa, e non soltanto il risultato di una presa di posizione filosofica. Tale punto di vista viene caratterizzato con termini che si richiamano alla «forma» (formale, formalistico, formalizzazione, ecc.), dove occorre prestare attenzione che questo impiego è giustificato anzitutto dall'opposizione forma-contenuto. Passare ad un piano formale significa passare ad un piano in cui il contenuto (e quindi, il significato del segno) viene messo da parte, e *di conseguenza* viene preso in considerazione soltanto il livello segnico. Questo passaggio viene talora, forse non a caso, trascurato e si parla di formalismo, formalizzazione, linguaggio formalizzato e simili, volendo richiamarsi al puro e semplice *impiego di un sistema di convenzioni segniche*, proposto in sostituzione del *linguaggio corrente* – che tende a diventare l'effettivo altro polo dell'opposizione

Il calcolo nel senso aritmetico, consueto ed elementare, del termine è un chiaro esempio del fatto che l'interesse dell'operazione di «prescindere dal significato» dipende proprio proprio da quella che abbiamo chiamato or ora «implicazione semantica».

Effettuare un calcolo nel senso usuale – si pensi ad una semplice moltiplicazione o ad una divisione – significa mettere in opera una tecnica di trasformazione segnica, il cui apprendimento sarà in generale legato ad una giustificazione concettuale. Tuttavia nell'esecuzione questa giustificazione non entra in linea di conto e può anche essere messa del tutto da parte, come del resto normalmente accade. La coscienza del riferimento significativo sta per così dire prima e dopo il calcolo – ed eventualmente accanto ad esso, nel senso che, mentre calcolo, so quello che faccio, so di compiere, e per determinati scopi, operazioni su numeri che hanno numeri come loro risultato. Questa consapevolezza tuttavia non alcuna parte nelle azioni che io di fatto compio.

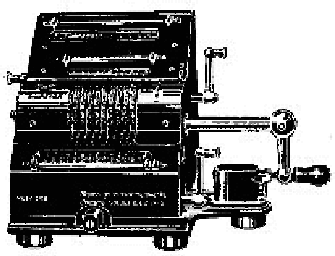
Nel calcolare non si pensa e forse anzi il pensiero disturberebbe il calcolo, forse lo rallenterebbe rendendolo più faticoso. In ciò consiste, *sotto l'aspetto psicologico*, l'automatismo dei calcoli. Ma parlando di automatismo dei calcoli parliamo sopratutto della possibilità, che non ha niente di psicologico, della loro *meccanizzazione*. L'agente del calcolo può cessare di essere una soggettività umana: il calcolatore è finalmente diventato una macchina.

Secondo Schopenhauer, che pure ha avuto uno spunto felice nella teoria del numero ai tempi della sua prima giovinezza[25], valutava nella sua tarda vecchiaia questa circostanza come

[25] Si tratta dell'inserimento della tematica filosofica del numero nel quadro del problema della terza forma del principio di ragione – quella che ri-

una prova certa della bassezza dell'aritmetica come attività dello spirito:

«Che la più bassa di tutte le attività dello spirito sia l'aritmetica è dimostrato dal fatto che essa è l'unica che possa essere eseguita anche da una macchina; così oggi, in Inghilterra, simili macchine calcolatrici sono, per comodità, diventate di uso frequente»[26].



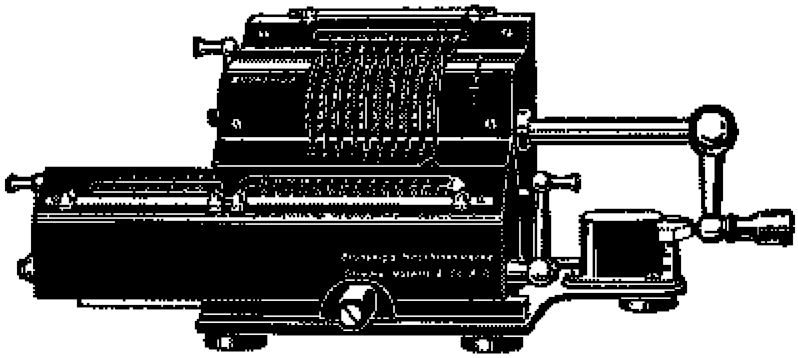
Forse la migliore risposta a questa frase di Schopenhauer è la meticolosa attenzione che Felix Klein dedica alla *Rechenmaschine* chiamata «Brunsviga» della Brunsviga Maschinenwerke Grimme, Natalis &Co.: ad essa, ai suoi meravigliosi congegni ed al modo del suo funzionamento Klein dedica ben tre pagine del primo volume della sua *Elementar Mathematik*[27].

---

guarda il fondamento d'essere (*Seinsgrund*) ovvero la *ratio essendi*. Benché Schopenhauer riprenda da Kant il richiamo alla problematica temporale, a ben vedere, questo richiamo viene indebolito, diventando la successione temporale un puro e semplice esempio efficace di *ratio essendi* che può essere citato accanto a quello del numero. Il fatto che un determinato istante presupponga necessariamente l'istante precedente e quello successivo rimanda ad un ordine necessario del tutto analogo a quello del numero: «Ogni numero presuppone i numeri precedenti come ragioni del suo essere: io posso giungere al numero dieci solo attraverso tutti i precedenti e solo grazie a questa conoscenza della ratio essendi so dove sono dieci, e dunque otto, sei, quattro». Cfr. A. Schopenhauer, *La quadruplice radice del principio di ragione sufficiente*, tr. it. di A. Vigorelli, Guerini, Milano 1990, p. 117.

[26]A. Schopenhauer, *Parerga e Paralipomena*, Adelphi, Milano 1983, II, p. 825.

[27]*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (I ed. 1908). I, Springer Verlag, Berlin, Vierte Auflage, Nachdruck 1968. Le figure della Brunsviga sono tratte da questo testo, p. 21.



Queste macchine «sottraggono al matematico il lavoro puramente meccanico del calcolo numerico che eseguono più celermente ed anzi in modo esente da errori in misura superiore di quanto egli stesso avrebbe potuto fare». La loro stessa esistenza contiene una conferma che nel calcolo intervengono solo regole formali, e non significati numerici che la macchina non è in grado di afferrare. Klein rammenta ancora che Leibniz, oltre ad essere il padre della matematica formale pura, fu anche l'inventore di una macchina calcolatrice – e in questa impresa si impegnò, non tanto per scopi pratici, ma perché stimolato dalla ricerca, tutta teorica, di ottenere conferme intorno alla natura essenziale dei calcoli. Il campo dei significati, ma anche il lavoro intelligente sui simbolismi, l'acquisizione di nuovi punti di vista per vecchi problemi, la capacità di delineare problemi e di prospettare soluzioni – tutto ciò è consegnato al pensiero matematico, che è tutto meno che il «pensare senza il pensiero»[28] della Brunsviga.

Relativamente alla problematica che stiamo sviluppando, la nozione di calcolo non è peraltro vincolata necessariamente alle operazioni aritmetiche in senso proprio. Una qualunque manipolazione e trasformazione di segni *secondo regole* può essere chiamata così. In questa accezione si può convenire di usare anche la parola «algoritmo».

[28] Klein riprende da Thomae l'espressione *Gedankenloser Denker*, polemicamente rivolta al matematico formalista.

In questo contesto la parola «segno» non ha più alcun legame con una relazione di designazione ed indica ora qualcosa di simile ad un «graffito», e per di più ad un graffito sul cui «significato» non è affatto il caso di interrogarsi: si tratta dunque di un *disegno*, di una *configurazione di linee*, quindi di un *oggetto visivo*, di una *figura*.

Le operazioni che definiscono il calcolo sono operazioni di *trasformazione* (o di *costruzione*) *figurale*: le regole si applicano a figure e consentono di passare da una figura ad un'altra.

Detto questo ci si rende subito conto che come esempi di calcoli in questa accezione generalizzata possono essere indicati gli schemi operativi precedentemente presentati per la notazione-tratto e per la notazionale posizionale. In essi vi è appunto un inizio (figura iniziale) ed una o più regole di sostituzione che possono naturalmente essere intese come regole di costruzione per figure, e quindi come regole che consentono di passare dall'una all'altra figura appartenente al calcolo[29].

Talvolta la configurazione iniziale di un calcolo viene chiamata *assioma* ed io credo che nulla sia più caratteristico dei mutamenti intervenuti nel nostro secolo nel campo del pensiero matematico-formale in genere dell'evoluzione subita proprio da questo termine, ed in particolare della possibilità di essere impiegata per la configurazione iniziale di un calcolo.

Questa parola che è sempre stata riferita a proposizioni e che è sempre stata carica di enfasi sul tema della verità – riferita com'era ad una proposizione che si impone con il solare chiarore dell'evidenza, e come tale anche racchiudente un enigma custodito forse nelle profondità incommensurabili dell'intelletto divino – si è dapprima radicalmente attenuata nell'idea della «mera assunzione», realizzando il proprio completo declino proprio in questa possibilità di indicare con essa un qualunque grafema tracciato su un foglio di carta, uno scarabocchio sul quale non è nemmeno lecita la domanda sul senso.

La giustificazione di questa estrema metamorfosi del si-

[29] In rapporto a questa nozione di calcolo, non si può non rammentare, sia pure solo di sfuggita, il fondamentale lavoro di P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer, Berlin 1969.

gnificato sta, da un lato, nel fatto che un assioma può essere una *premessa* di un sistema deduttivo, e come tale si trova al suo inizio, dall'altro nel fatto che una premessa è una proposizione, e questa, «formalmente considerata», è appunto null'altro che una configurazione grafica; il sistema deduttivo può essere a sua volta concepito e trattato come un calcolo nell'accezione or ora definita.

Talora proprio attraverso questi spostamenti di senso scopriamo aspetti affini che non sono subito a portata di mano. Lo spostamento di senso implica un mutamento di punto di vista, e si scoprono così nuovi modi di approccio e nuovi problemi. Questo vantaggio sarebbe tuttavia interamente compromesso se non si tenessero sempre presenti i percorsi che ci hanno condotto in questa o in quest'altra direzione e si volesse approfittare dello spostamento di senso per cancellare differenze concettuali che sono estremamente rilevanti sotto il profilo filosofico. Il campo del *pensiero formale* è eminentemente caratterizzato dalla possibilità di far trapassare nozioni diverse l'una nell'altra, ma ciò non significa per nulla che questo campo sia la notte in cui tutte le vacche sono nere. La filosofia della matematica, a sua volta, «non consiste nell'avvolgere la matematica con una cortina di nebbia»[30].

L'importanza di un punto di vista genetico, ma vorrei dire più ampiamente: *lo scopo di una riflessione epistemologica in genere sta proprio nel ristabilire le differenze concettuali* una volta che, per qualche buon motivo, esse siano state tolte.

Se la notte è diventata troppo fonda, se le parole hanno cominciato troppo velocemente a scambiarsi le parti, se non sappiamo più dove cominci il calcolo e dove la proposizione, allora è forse opportuno interrogarsi sul significato che quelle espressioni avevano «una volta» presso il linguaggio, presso l'esperienza.

Da una proposizione posso arrivare ad una pura configurazione grafica, ma non da ogni configurazione grafica posso arrivare

[30] L. Wittgenstein, *Philosophische Grammatik*, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1969, p. 367 (tr. it. di M. Trinchero, La Nuova Italia, Firenze 1990, p. 326).

alla proposizione. Così è possibile considerare una teoria deduttiva dal punto di vista dell'idea del calcolo, ma un calcolo *è* una *teoria* deduttiva quanto poco lo è una qualunque moltiplicazione o divisione.

Tirando le fila: la nostra esposizione ha mirato a dare il massimo risalto alla relazione interna tra il concetto di numero e quello di algoritmo e quindi anche alla generazione della serie dei numeri intesi come un calcolo generatore di configurazioni segniche peculiari. Tuttavia il percorso che abbiamo seguito mostra che non si tratta affatto di una pura cancellazione della componente logico-concettuale, quindi di una *matematica senza il pensiero matematico,* secondo un'obiezione che è stata spesso rivolta all'orientamento formalistico nella filosofia della matematica.

Questo sospetto può sorgere solo se non si è richiamata a sufficienza l'attenzione sul fatto che ciò che rende possibile l'«astrazione dal significato» è il riconoscimento di un nesso di tipo peculiare tra significante e significato che istituisce un intreccio ricco di conseguenze tra livello concettuale e livello segnico-simbolico.

Il concetto può precedere il segno, ma anche venire dopo di esso, ed anzi forse è proprio l'anticipazione del segno rispetto al concetto, che si è così spesso verificata nella storia della matematica, ad essere particolarmente significativa per la sua filosofia.

Di fronte alla possibilità del segno, il pensiero matematico sospetta la possibilità del concetto anche là dove per il momento questa possibilità non solo non è logicamente garantita, ma può persino ragionevolmente essere messa in questione. Il concetto si prospetta ai margini del segno e prospetta un segno ai propri margini.

Tenendo conto di ciò non si potrà essere troppo soddisfatti da una sottolineatura del simbolismo come un puro artificio pratico. Se l'introduzione di un simbolo reca qualche vantaggio «pratico» – si pensi ancora all'introduzione del segno per lo zero – allora si può essere sicuri che nuovi concetti concetti bussano alla porta.

A questo intreccio tra segno e concetto è naturalmente collegato anche il problema della «figuralità» del simbolismo. I segni sono *oggetti della visione*. Questa circostanza può passare inosservata, se ad esempio si insistesse soprattutto sulla convenzionalità e sull'artificialità del segno; oppure potrebbe essere ritenuta relativamente irrilevante dal momento che si potrebbe pensare che si metta su carta qualcosa che sta interamente altrove.

Una valutazione diversa deve invece essere data se siamo disposti ad attribuire un significato esemplare, anche sotto il profilo teorico, al problema della *perspicuità nella notazione* che si è presentato più volte nel corso della nostra esposizione. La perspicuità è legata ad un'*evidenza* che riguarda *l'oggetto percepito come tale,* nelle sue articolazioni e nelle sue distinzioni interne. Questo problema si pone agli inizi del numero, quando il numero trova rappresentazione in configurazioni tipiche, che vengono riconosciute in questa loro tipicità indipendentemente da un processo autentico di conteggio, ma si pone anche nel passaggio cruciale alla serie aritmetica vera e propria.

In questo passaggio è ancora la questione del *raggruppamento* che passa in primo piano, ma essa si pone ora come una questione *ghestaltica* e *calcolistica* ad un tempo, come una questione in cui *concettualità e intuitività si intrecciano formando un unico nodo*.

Nell'idea di calcolo non si tratta dunque soltanto dell'escogitazione di un linguaggio artificiale, di una concentrazione e una semplificazione simbolica da cui ci aspettiamo diversi vantaggi pratici. Si tratta piuttosto di una rappresentazione in cui si sedimenta e si concretizzano concetti, mettendo a punto, nello stesso tempo, un vero e proprio strumento del pensiero. La rappresentazione assume carattere di *figura* tracciata su un foglio di carta, dunque di una *cosa visiva*. In questo senso parlare della aritmetica ed in generale del pensiero matematico alla luce della nozione di calcolo contiene il riconoscimento di un ruolo dell' «intuizione» almeno nell'accezione elementare che si richiama all'atto del vedere[31]. Questo vedere *non* è tuttavia un mero vedere, un puro osservare e accogliere dati della visione. Nel segno «101» riconosco una differenza rispetto al segno «100». Questa differenza è una differenza figurale. Il riconoscimento tuttavia

[31] Cfr. G. Piana, *Interpretazione del «Tractatus» di Wittgenstein*, cit. , p. 75 e p. 89.

non si limita alla mera qualità figurale, ma esso riporta la qualità figurale alla regola di costruzione secondo quale questi grafemi sono prodotti. Se con «intuizione» intendessi qualcosa di simile allo sforzo psicologico di rappresentare nella mia mente (di «figurarmi») un insieme di cento elementi e di cogliere nello stesso tempo la differenza tra esso ed un insieme di cento e uno elementi allora certamente fallirei nello scopo: la differenza concettuale tra l'uno e l'altro numero, che è perfettamente chiara, verrebbe resa confusa nello stesso momento in cui si tenta si tradurla in una immagine della mente. La parola «calcolo» si contrapporrà nettamente a «intuizione» in questa accezione del termine. Tuttavia è giusto anche dire che nel calcolo «alla cieca» bisogna tenere gli occhi bene aperti. E ciò non basta ancora: nella figuralità percettivamente colta non vengono soltanto afferrati degli oggetti, ma dei rapporti strutturali, dei nessi formali interni, delle legalità generali che da un lato vengono viste dentro la figura, dall'altro possono essere proiettate molto lontano da essa sul piano del pensiero puro.

Queste nostre considerazioni conclusive, proprio insistendo su questo aspetto segnico-figurale dell'aritmetica, finiscono per suggerirci che forse è opportuno spostare la nostra attenzione proprio sul versante delle figure. Forse l'aritmetica è una specie di geometria? si chiedeva Wittgenstein[32]. No, non lo è. Ma la domanda è in se stessa molto interessante.

[32] L. Wittgenstein, *Osservazioni filosofiche*, tr. it. di M. Rosso, Einaudi, Torino 1976, p. 89: «Si potrebbe dire: l'aritmetica è una specie di geometria; vale a dire, quello che in geometria sono le costruzioni sulla carta, sono in aritmetica i calcoli (sulla carta). – Si potrebbe dire che si tratta di una geometria più generale».

PARTE SECONDA

SULLA COSTRUZIONE ITERATIVA DELLE FIGURE

§ 1

La geometria come scienza dello spazio e scienza delle forme – Numeri e figure – La geometria come «semantica» dell'aritmetica – I vincoli «intuitivi» e l'istanza del loro superamento.

Benché il nostro sguardo sia ora volto in altra direzione, domande e metodi restano gli stessi. Come in precedenza ci siamo mossi sulla soglia della teoria del numero, così ora, guidati dall'intenzione di avviare alcune riflessioni sul problema della «forma», e quindi su questioni che chiamano in causa la geometria, avremo cura di mantenerci nei luoghi che sono più accessibili alla natura ed al carattere della nostra considerazione epistemologica, quindi nei luoghi in cui sia più chiaramente avvertibile il nesso tra concetti geometrici elementari e i dati che possiamo attingere all'esperienza percettiva concreta.

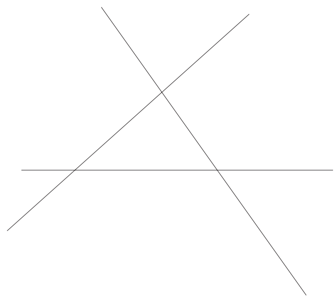
È opportuna intanto una precisazione terminologica. Nel nostro contesto di discorso, le parole *forma* e *figura* debbono potersi scambiare le parti, e in particolare dunque la parola «forma» andrà intesa per lo più secondo l'inclinazione suggerita dalla parola *figura*: a sua volta questa va intesa in un'accezione ampia, e quindi non deve far pensare solo a linee che si chiudono formando un contorno, ma a grafemi in genere, come del resto è già da noi stata impiegata in precedenza.

Il dettaglio terminologico ed eventuali complicazioni che potrebbero sorgere può essee comunque controllato da indicazioni più precise quando queste si rendessero necessarie oppure da differenze di contesto capaci di rendere inequivoco l'impiego dei termini.

Più importante è invece la questione del modo in cui si stabilisce un collegamento tra la forma-figura e la geometria. A questo proposito ci si deve chiedere anzitutto se la forma-figura possa servirci al fine di circoscrivere la specifica regione ontologica della geometria oppure se non sarebbe più giusto considerare come nozione di base quella dello *spazio*, a cui la precedente potrebbe essere subordinata.

All'interno di una concezione in cui venisse negata scientemente qualunque specificità «ontologica» della geometria la questione sarebbe del tutto irrilevante. La domanda è invece particolarmente ricca di interesse se proposta secondo un'angolatura epistemologica che ha in certo senso come propria vocazione la tendenza alla differenziazione.

Dal punto di vista della priorità della nozione di spazio, la forma verrebbe intesa essenzialmente come una sua *partizione*, come un *ritaglio* che viene effettuato in esso. Una linea ci apparirebbe come linea «divisoria» e le figure come spazio delimitato dall'intersezione di linee.



Il rapporto di parte sarebbe qui determinante. Nell'esperienza della spazialità e delle forme, sembra tuttavia che si proceda dalla figura allo spazio piuttosto che inversamente dallo spazio alla figura. Si sarebbe tentati di dire: lo spazio non è dato «immediatamente», bensì attraverso i corpi che si trovano in esso. Le forme vengono colte anzitutto in quanto inerenti ai corpi, come «contorni» che possono essere poi considerati separatamente ed esaminati come tali. Inoltre le figure non solo vengono viste ed osservate, ma possono essere liberamente riprodotte: una figura può essere disegnata, e quindi costruita e ricostruita, in una libera variazione di tutti i rapporti. In questo modo si attenua ancor più il legame con il corpo nella sua fisicità, e dunque anche si indebolisce l'efficacia dell'immagine del «contorno» che rimanda proprio a questo legame. La figura tende avere la propria autonomia rispetto al corpo che essa riveste.

Chi disegna una figura su un foglio di carta sperimenta tuttavia anche un'altra possibilità interessante: quella di far sorgere la figura dal tracciato di una linea che alla fine si richiude.

In realtà si può parlare di un triangolo o di un quadrato, e persino di una piramide o di un cono, che nella loro tridimensionalità richiamano più direttamente lo spazio percepito e i corpi in esso, senza che la nozione della *spazialità in generale* sia realmente messa in questione.

Si avranno allora di mira unicamente la costituzione interna delle figure, il modo in cui esse sono fatte, le loro eventuali relazioni, le loro legalità interne. Vi possono essere linee e piani che si intersecano, e le figure che sorgono da queste intersezioni, potranno essere considerate senza che lo spazio *in grande* debba rappresentare un effettivo tema teorico.

In realtà è proprio questo l'orientamento di pensiero che troviamo alle origini della geometria.

La geometria non si presenta senz'altro come scienza dello *spazio*, ma anzitutto come *scienza delle forme* – anche se, soprattutto nella prospettiva platonica, si impone un' immagine dello spazio come totalità onnicomprensiva, e di conseguenza anche l'idea della forma come parte e ritaglio. Ciononostante il pensiero dello spazio passa sullo sfondo, sostanzialmente non tematizzato, rispetto a quello della forma: gli stessi costituenti ultimi ed ideali del reale sono le forme perfette dei solidi regolari. Questa circostanza, d'altra parte, rimanda alla costituzione percettiva della spazialità. Lo spazio come latenza di tutte le forme – come poteva essere suggerito dalla riflessione platonica nel *Timeo* – è un pensiero che non si trova affatto nei pressi dell'esperienza. E naturalmente ancora più lontana è l'idea di una figuralità interamente dominata da leggi che la inscrivono all'interno di una spazialità matematicamente determinata, secondo il senso della rappresentazione delle coordinate cartesiane. È interessante sottolineare come questa idea, che pure non è affatto priva di rapporti con la spazialità sperimentata, sia un'idea particolarmente «evoluta» e come nello stesso tempo a partire da essa prenda l'avvio una tendenza, destinata ad accentuarsi sempre più, *a riportare*, per dirla in breve, *la forma al numero*, e quindi ad attenuare il peso dell'elemento intuitivo di fronte all'elemento puramente intellettuale.

In effetti tra numero e figura si impone ben presto questa differenza: parole come «cerchio», «quadrato», «triangolo» indicano *cose che si vedono*. La forma è appunto là, insieme alla cosa, come suo carattere o attributo. Vi sono i profili dei monti delle montagne e le linee delle coste; la curvatura visibile dell'orizzonte. La forma tondeggiante della luna. Le forme possono poi essere riprodotte e, quando siano riferite a cose del mondo circostante, esse possono essere toccate con mano; oppure possono essere date in immagine ed acquisire così la duttilità di mere parvenze che sono interamente in nostro possesso e sulle quali possiamo liberamente intervenire separando, unendo, collegando, componendo e scomponendo.

Il numero cinque – o qualunque altro – invece non si vede. Nell'esperienza non ci imbattiamo mai nei numeri come oggetti, ma solo nei modi dei loro impieghi. Di fronte a noi ci possono essere molteplicità più o meno «numerose». Ad esse può essere attribuito un numero che peraltro non si può afferrare su di esse così come si afferra il colore di una cosa o il suo spessore. L'attribuzione di un numero comporta un'operazione di conteggio. Nel conteggio ci possiamo sbagliare – e questa possibilità aleggia su questa «proprietà» come un principio di instabilità. Analogamente, il numero di posizione si riferisce a determinazioni relazionali interne che sono in via di principio mutevoli in rapporto alle molteplicità empiriche; e se consideriamo infine il numero in rapporto all'iterazione di un'operazione, esso si dissolve nell'iterazione stessa senza alcuna sedimentazione obbiettiva. Il numero, appena c'è, subito scompare.

Ma tutto ciò è vero soltanto se guardiamo al versante dell'empiria. Su questo versante i numeri sembrano trovarsi a disagio. Invece se consideriamo il numero come pura oggettività dovremmo esprimerci in modo del tutto diverso: il numero ci appare allora come un'oggettività *intellettuale* per eccellenza, come qualcosa che *è* solo in quanto è *conforme ad una legge*, e dunque un autentico modello di ciò che può essere interamente privo di contaminazioni con la pratica e l'osservazione: il separare, il collegare, il comporre e lo scomporre in rapporto ai numeri hanno un equivalente in operazioni manuali solo attraverso la mediazione delle molteplicità concrete. Prescindendo da questa mediazione queste operazioni meritano di essere caratterizzate come puramente intellettuali in un'accezione particolarmente forte.

Certo, in quanto calcoli queste operazioni sono effettuate su figure e mediante figure. Su questo punto abbiamo in precedenza messo l'accento, ed anzi abbiamo approfittato di ciò per operare il passaggio a questo nuovo ambito di problemi. Ma per quanto il sospetto implicito in questo passaggio fosse proprio la possibilità di cogliere qualcosa di simile ad una componente «geometrica» nei calcoli, tuttavia resta sempre una differenza essenziale. Le «figure» di un calcolo non sono, *come tali*, temi di una indagine, non sono *esse stesse* oggetto di esame. Confermiamo così la risposta negativa che abbiamo dato alla fine della prima parte: l'aritmetica *non* è affatto una sorta di geometria.

Ciò che ci interessa nelle figure dei calcoli sono le pure regole della loro manipolazione *sintattica* – e di conseguenza le loro qualità figurali vere e proprie sono per lo più fuori questione: esse vengono considerate solo in quanto agevolano od ostacolono le pratiche manipolatorie. Il fatto che poi i segni-figura di un calcolo possano essere considerati indipendentemente da qualunque riferimento significativo rappresenta indubbiamente una possibilità direttamente connessa con l'oggettività come una pura oggettività intellettuale, interamente libera da sostegni empirici, nel senso e nei modi che abbiamo in precedenza illustrato.

Questa possibilità apre peraltro un problema di garanzie «semantiche» che, a partire dalla matematica greca, attraversa l'intera storia dei rapporti tra aritmetica e geometria.

Proprio considerando questo punto si vede quanto sia erronea la posizione che vede nell'«aritmetico» una componente intuitiva e dinamica e nel «geometrico» l'elemento rigido, astratto. Se mai è vero l'opposto. Ciò è mostrato anche dal fatto che si è spesso avuta la sensazione che in ambito geometrico sia possibile effettuare quell'ancoramento del senso delle parole, di cui invece si potrebbe sentire il bisogno in ambito aritmetico. Procedendo attraverso i calcoli non è certo fino a che punto sia possibile mantenere la presa sul senso che era invece presente nei primi inizi.

Esemplare da questo punto di vista è certamente il modo in cui vengono considerati i rapporti tra aritmetica e geometria nella matematica greca. In essa l'aritmetica assolve la parte della disciplina «matematica» eminente, di una teoria pura libera da ogni contaminazione con le indeterminazioni dell'empiria. Nello stesso tempo viene demandato alla geometria il compito di fornire quei *riferimenti* in mancanza dei quali si assume che l'espressione puramente calcolistica resterebbe semanticamente indeterminata[33]. Assumendo questo punto di vista questa indeterminatezza apparterrebbe anche a segni come a^4 o a^5 che, a differenza di a^2 o a^3 non hanno un possibile corrispondente geometrico[34]. Analogamente $\sqrt{2}$ è un segno aritmetico che può essere accettato solo nel momento in cui è stata assodata la corrispondenza geometrica con la diagonale di un quadrato. Questo è l'oggetto a cui il segno può essere riferito e da cui esso viene legittimato.

Del resto una possibile fenomenologia del numero – in qualche modo memore della matematica greca – potrebbe anche prendere le mosse, anziché dalla molteplicità come abbiamo fatto in precedenza, da un concetto di «unità» che riceverebbe la sua illustrazione diretta nel μέτρον ovvero in una lunghezza arbitrariamente scelta come (unità di) misura. Seguendo questa via si mostrerebbero aspetti che da altre angolature sarebbero più remote. Intanto il riferimento fondamentale non sarebbe rappresentato da una molteplicità disparata, sulla cui quantità ci si deve anzitutto interrogare, ma dalla nozione dell'*intero* e della *parte*, così come del *rapporto tra interi che possono essere ripartiti* ed in questo modo rappresentare l'uno la misura dell'altro. La stessa nozione dell'1 *si distribuisce sui due poli dell'intero e della parte* rappresentando ad un tempo l'intero stesso – la totalità di tutte le sue parti – e quella parte che è in grado di misurarlo: l'intero e l'unità di misura. Secondo questa angolatura risulte-

33 Cfr. K. Th. Volkert, *Die Krise der Anschauung*, Vandenhoeck e Ruprecht, Göttingen 1986, pp. 8 sgg. Si mette qui in evidenza che i numeri venivano considerati – anche sotto gli impulsi platonici – come entità puramente ideali mentre la geometria veniva considerata assai più compromessa con l'empiria e difficile da districare da essa. All'aritmetica viene tuttavia attribuita solo una priorità teorica, dal momento che la matematica greca resta orientata dalla geometria. Volkert rammenta anche l'opinione di Reidemeister (*Das exakte Denken der Griechen*, Darmstadt 1972, p. 15) secondo il quale questa situazione paradossale è il *Kernproblem* della matematica greca.

34 *Ibid*. p. 13.

rebbe con particolare pregnanza e immediatezza la connessione del numero con un'operazione, e in particolare con la sua iterazione possibile. Non è possibile concepire alcunché come «unità di misura» senza includere in questa concezione un riporto iterato. L'importanza del numero-di-volte ai fini della costituzione del concetto di numero non verrebbe certo diminuita da questo ordine di considerazioni.

Occorre tuttavia notare che la pretesa di trovare una garanzia semantica nella geometria per le entità aritmetiche rischia di schiacciarla sulle cose di questo mondo più di quanto sia lecito fare. Il vincolo alle cose sta presso le prime origini, ma non appena i concetti sono stati costituiti la geometria, non meno dell'aritmetica, procede per vie autonome e non ha bisogno di confrontarsi ad ogni passo con la realtà. Qui come altrove nel pensiero astratto la questione del senso può risultare sospesa. Del resto proprio questa sospensione rappresenta uno dei motori essenziali di progresso e di sviluppo del pensiero astratto in genere: questo pensiero trae stimoli da evidenze ricercate e da dubbi sui significati possibili, e non certo dal compiacimento di un viaggio attraverso un universo di segni senza significato, lungo il quale sia possibile fare «assunzioni» a piacimento.

§ 2

La geometria e la terra – Husserl e Mandelbrot: un invito a ricordare – Il problema di una tipologia empirica delle forme – Inizio di una libera riflessione che prende spunti da Euclide – Riflessioni su linee molto sottili – Riflessioni sull'angolo piatto.

Geometria è costituita da due parole una delle quali allude alla «misurazione», l'altro alla «terra» – e la terra di cui si parla è naturalmente la terra nel senso in cui ne parlano i contadini piuttosto che gli astronomi, la terra da arare, la terra da vendere, la terra da misurare. In un'appendice famosa della Crisi delle scienze europee – Husserl sottolinea più volte la circostanza secondo la quale il sapere geometrico si è sviluppato nella pratica degli agrimensori, e lo sottolinea avendo di mira un discorso non certo di carattere storico, quanto di genesi e di formazione dei concetti[35].

In tempi molto più recenti, Benoît Mandelbrot ha nuovamente richiamato l'attenzione su questa origine in termini pressoché identici e in tutta probabilità senza conoscere l'analoga presa di posizione di Husserl. Quel che rende poi particolarmente interessante la sua presa di posizione è che essa non ha alla propria base ragioni filosofiche di carattere generale, ma motivi strettamente legati ai progressi della geometria come impresa scientifica.

Egli scrive così: «È ben noto che descrivere la terra fu uno dei primi problemi formali che si è posto l'uomo. Per opera dei Greci la 'geometria' diede alla luce la geometria matematica. Tuttavia – come succede così spesso nello sviluppo delle scienze! – la geometria matematica *dimenticò* molto presto le sue origini, dopo avere appena grattato la superficie del problema iniziale»[36].

In entrambi gli autori c'è dunque un *invito a ricordare*. Prima che l'interesse teorico si impossessi del campo delle forme per fare di esso il tema di una scienza come la geometria, questo campo appartiene al nostro mondo circostante ed all'esperienza che facciamo di esso.

Quando si parla di forme concretamente esperite non si vuole alludere solo a puri e semplici *dati*, ai dati della visione e dell'osservazione visiva. Si tratta piuttosto di un'esperienza pratico-percettiva: non solo per il fatto che le figure possono essere raffigurate, e in quanto raffigurazioni esse possono essere prodotte e ricostituite, ma ancor prima per il fatto che, nella loro inerenza alla cosa materiale, le forme possono essere concretamente realizzate, manipolate e modificate.

Volendo porre l'accento su questo punto, più che all'agrimensura, converrebbe forse pensare ad una pratica diretta di manipolazione, ad esempio alla pratica del falegname, che deve procacciarsi le assi, togliere le asperità alla corteccia, ottenere superfici liscie per poter alla fine realizzare oggetti che debbono

[35] E. Husserl, *La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*, tr. it. di E. Filippini, Il Saggiatore, Milano 1969, Appendice Terza, pp. 380 sgg.

[36] B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali - Forma, caso, dimensione*. Einaudi, Torino 1987 (1 ed. 1975), p. 16.

assolvere determinate funzioni utili nella vita di ogni giorno. Oppure alle pratiche di modellazione della creta, per realizzare recipienti, anfore e vasi. O a quelle degli scalpellini; in generale alla produzione di materiali da costruzione, come mattoni, lastre, pali, colonne, ecc.

Come nelle operazioni di conteggio, un orizzonte di interessi economici legati agli scopi ed alle necessità della vita presiede queste azioni. Restando all'interno di questo orizzonte si perviene ad una *tipologia di forme*, ad una classificazione nella quale la forma comincia con l'essere colta ed individuata in se stessa, e dunque riconosciuta come appartenente a questo o a quel tipo.

Potremmo dire che vi sono linee che hanno un certo *andamento caratteristico* in base a cui esse vengono raccolte sotto un tipo. È questo andamento che riconosco quando dico: questa è una curva, questa è una linea diritta.

All'interno di questa tipologia delle forme una particolare importanza assume la distinzione tra forme regolari e irregolari. Questa distinzione poggia anch'essa, almeno in parte, sull'*impressione* visiva, cioè sul modo in cui una certa figura, con l'aspetto che tipicamente la contraddistingue, si imprime nella mia mente – quindi l'irregolarità sull'impressione visiva del disordine, mentre la regolarità sulla presenza di ricorrenze interne che propongono caratteri più nettamente e chiaramente definiti facilitando in qualche modo la sua appropriazione. All'interno di un orizzonte pratico si fa sentire anche un interesse in senso lato «architettonico» per la regolarità, che appare allora legata alla *stabilità dell'oggetto*, all'aderenza alla *funzione* che esso deve assolvere. Con quelle superfici lisciate a dovere il falegname dovrà realizzare sedili che si reggano sulle proprie gambe e tavoli non troppo sghembi; e così l'acqua non si dovrà rovesciare dalle anfore e i mattoni dovranno poter essere facilmente essere messi in una pila.

È il caso di ricordare che «isoscele» significa letteralmente «con gambe eguali» (σκέλος, gamba) e l'espressione «scaleno» viene invece, secondo l'etimologia proposta da Proclo, collegata allo zoppicare (σκάζειν)[37]. In ogni caso può essere connessa con σκολιός che richiama qualcosa di sghembo, di malamente inclinato[38]. In effetti, da ciò che abbiamo chiamato *andamento* o *aspetto caratteristico* non sono affatto escluse valenze che ribadiscono il carattere della figura sul piano delle sintesi immaginative. Le forme-figure possono ricevere così mani e piedi, ed apparire equilibrate come persone dalle belle proporzioni oppure avere un andamento claudicante che manifesta un equilibrio instabile.

Naturalmente non appena l'attenzione teorica comincia a ridestarsi, districandosi a poco a poco ed emergendo come un interesse autonomo, queste valenze si attenuano, perdono di importanza, e muta l'angolatura secondo cui gli stessi aspetti vengono colti: così ad esempio nella *regolarità* si intravvede l'azione della *regola*, e quindi strutture e uniformità che possono essere oggetto di conoscenza, prospettando la possibilità di operazioni generalizzanti. Anche da questo punto di vista è esemplare l'enfasi platonica sui solidi regolari. Gli andamenti caratteristici possono essere colti secondo un'intenzione rivolta non tanto a fissare caratteri accidentalmente ricorrenti o proprietà comuni intorno alle quali raccogliere il tipo, ma a stabilire nessi tra l'aspetto delle figure e possibili relazioni funzionali interne.

Nel tipo empirico traspare il tipo eidetico: si è messo in moto un processo che deve condurre dalle intuizioni e dai concetti *bastardi* concresciuti in esse, ai concetti *puri* : dagli uni agli altri non si passa di salto. Vi sono invece transizioni, formazioni miste in cui coesistono componenti percettive e immaginative insieme a frammenti di concettualizzazione vera e propria. Ma sarebbe certo un errore pensare che un processo che comincia

[37] Cfr. Proclo, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini, Pisa 1971, pp. 147-148.

[38] Nel proporre questa informazione A. Frajese e L. Maccioni che hanno curato l'edizione italiana degli *Elementi* di Euclide, UTET, 1970 sottolineano che essa viene concessa «per curiosità filologica» e si aggiunge, chissà perché, «ad uso del lettore»(p. 69): quasi che volessero dire: noi beninteso «ce ne laviamo le mani» (atto purificatore per eccellenza). – Il sospetto che essi possano dare una qualche importanza alla cosa è così esorcizzato.

così continui semplicemente all'insegna della progressiva purificazione. La questione è, dal punto di vista epistemologico, assai più movimentata.

Ripensiamo ancora ad Euclide. Con Euclide abbiamo lasciato alle nostre spalle tutti i falegnami, gli scalpellini ed i vasai del mondo. Prima di lui vi è uno straordinario accumulo di acquisizioni orientate da un autentico interesse conoscitivo. Ed Euclide non si pone il problema di *raccogliere insieme*, di realizzare un puro e semplice sommario delle conoscenze disparate sulle forme spaziali, quelle conoscenze che la riflessione geometrica greca aveva già prodotto in gran numero e con straordinaria fecondità. L'intenzione di ridare il giusto valore alla grande tradizione di pensiero che precede la sintesi degli *Elementi*, e che questa sintesi ha forse contribuito a oscurare quasi che tutto sorgesse in questo grande libro, non deve affatto indurre a ritenere ingiustificata l'ammirazione che gli è stata tributata per secoli. Al contrario: proprio perché con un sapere storiografico più avveduto è possibile mostrare che la geometria greca non è uscita dalla testa di Euclide come Minerva dalla testa di Giove, siamo in grado di riconoscere ancor più e ancor meglio il fatto che il merito autentico ed esclusivo di Euclide sta anzitutto nel senso globale del suo progetto: egli si pone infatti il problema di una *vera e propria costituzione originaria del campo delle forme*, di una costituzione in via di principio *compiuta* e, in un senso particolare, *interamente chiusa*.

Potremmo dire che in Euclide si inaugura un *modello di discorso del tutto nuovo e mai sperimentato prima di lui*. Ciò che viene inventato è un vero e proprio *nuovo gioco linguistico* che, a differenza di quello quotidiano, non comincia ovunque e in nessun luogo, ma deve esibire esplicitamente i propri inizi e le proprie regole e contenere proposizioni *vere* che debbono avere all'interno di quel gioco le proprie giustificazioni assolute.

Questo gioco comincia con le definizioni – e noi dovremmo cercare un contatto vivente con quei tempi lontani per essere in grado di avvertire la grandiosità del progetto che in esse si annuncia. Certamente, aprendo gli *Elementi*, ciascuno ha già una qualche idea del senso di parole come punto, linea, angolo, ecc., dal momento che ci accade di impiegarle in contesti quotidiani.

Di fronte a quei sensi precostituiti legati agli impieghi correnti, quelle definizioni giungono inattese e sconcertanti.

Tu sai certamente che cosa sia un punto. Ed ora io *ti dirò* che cosa esso è:

Un punto è ciò che non ha parti

Era così? Sapevi già questo? Si prova qui un leggero senso di vertigine. Oppure:

La linea è lunghezza senza larghezza

Chiunque avrebbe ragione di chiedersi se una frase come questa possa in generale essere compresa.

Di lunghezza e di larghezza si può certo parlare in rapporto alle linee che eventualmente vediamo o possiamo produrre su un foglio di carta. Le linee possono essere spesse o sottili, e possiamo anche stabilire un ordine che va dal più al meno. Supponiamo allora di disporre di uno strumento traccialinee che ci consenta di regolare a piacere lo spessore della linea. Tracciamo dunque una linea di un determinato spessore, poi altre linee sempre più sottili, o inversamente. Compiamo dunque un'azione, e la andiamo ripetendo secondo la possibilità del più e del meno, che è tuttavia limitata sia dalle capacità dello strumento sia della nostra disposizione rispetto al senso delle parole *spesso* e *sottile*.

Voglio dire che di fatto ci sarà uno spessore massimo *al di là del quale non saremo più disposti a chiamare la figura così prodotta una linea*, ma parleremmo piuttosto di una *superficie rettangolare* nera; nell'altra direzione sappiamo che prima o poi si arriverà ad un punto in cui diremo: «*Più sottile di così non si può*»! Oppure: per i nostri scopi è del tutto *irrilevante* ottenere una linea più sottile.

Su questo semplice esempio cominciamo ad intravvedere in che modo, a partire da operazioni e oggetti concreti, si innestano processi che vanno del tutto al di là di essi. In effetti abbiamo imparato dalla scuola che le figure tracciate sulla lavagna, su un foglio di carta o sullo schermo di un calcolatore *non sono* le figure di cui parla propriamente la geometria. Il maestro elementare renderà subito avvertiti di questo i suoi giovani allievi. Le figure geometriche sono, non meno dei numeri, delle oggettività ideali, sono «oggetti del pensiero». Ma come rendere conto del senso di queste espressioni, che certamente non siamo a nostra volta obbligati a comprendere? Non basta il parlare di idealizzazione o di ideazione: l'idealizzare deve infatti potersi precisare *facendo riferimento a procedure determinatamente indicabili, a vere e proprie regole che annunciano, nel momento in cui vengono messe in opera, la presenza del pensiero puro.* Questo pensiero si appiglia, nel nostro esempio, alla possibilità di disporre di una *serie ordinata* che rimanda a sua volta ad un'*azione iterata*. L'iterazione può essere intesa come una semplice possibilità, mettendo interamente da parte ogni problema relativo all'*eseguibilità effettiva dell'operazione*, con gli scopi che eventualmente la determinano, così come agli strumenti materiali che consentono la sua realizzazione oppure agli impedimenti ed agli ostacoli empirici che renderebbero la prosecuzione di fatto impossibile.

A questo punto si verifica una radicale modificazione della situazione complessiva e dunque una radicale modificazione di senso: il più e il meno, da cui la serie riceve il proprio ordine, stabiliscono anche che essa *deve* continuare finché lo *può*: ciò significa che il processo *potrà* essere idealmente proseguito sino ad una linea di sottigliezza pari a zero. Ogni suo passo verrà poi concepito come un'approssimazione a questo valore.

Cominciamo così a identificare nella nozione di ordine, di iterazione e del procedere-verso-un-limite alcune delle leve su cui il pensiero può appoggiarsi nella sua attività produttiva di nuove oggettività.

Nella seconda definizione euclidea, e del resto in ogni altra, possiamo dunque cogliere quelli che potremmo chiamare *metodi di idealizzazione*, che sono vere e proprie regole del pensiero puro. Occorre anzi sottolineare che solo la possibilità di fornire esempi di questi metodi è in grado di riempire di contenuto parole che altrimenti resterebbero vuote ed oscure, apparentemente affidate ad un'interpretazione psicologizzante, come idealizzazione, pensiero puro, attività intellettuale e così via.

Tutto ciò può essere illustrato anche per difetto – prendendo nota di ciò che in Euclide *ancora non c'è*.

Di angolo piatto nemmeno si parla. Alcuni commenti ci rendono avvertiti di questa «lacuna».

L'angolo piatto «è *per noi* un angolo vero e proprio»[39] mentre per Euclide non lo era. Anzi, esso viene escluso dalla Definizione VIII: «Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e *non giacciano in linea retta*»[40].

Ma siamo realmente certi che *per noi* l'angolo piatto sia un angolo vero e proprio? (Se qualcosa è piatto, si sarebbe tentati di dire, non è certo un angolo).

La verità è che qui dobbiamo far valere la tensione tra discorso corrente e gioco linguistico geometrico: e il discorso corrente non ha imparato nemmeno nel ventesimo secolo che vi sono angoli piatti. Per esso vi sono ancora angoli e spigoli, e tra gli uni e gli altri vi è una profonda e ben nota differenza. «Vai nell'angolo!» – si dice al bambino nel gioco dei quattro cantoni (mai e poi mai intenderemmo l'angolo piatto); oppure «Attento allo spigolo!» – agli spigoli, infatti, a differenza che agli angoli, bisogna soprattutto fare attenzione. E questo accade non perché il discorso corrente sia particolarmente refrattario alla scienza, ma per il fatto che esso è immerso tra le cose concrete di questo mondo, e ad esse riferisce in primo luogo i suoi termini.

Naturalmente questa grossolana differenza potrebbe assottigliarsi nello stesso momento in cui la forma-figura viene *estratta* dal mondo delle cose e per così dire *semplificata e stilizzata in un disegno*. Noi siamo tentati di concepire anche una simile semplificazione e stilizzazione come un processo astraente in cammino. Angoli e spigoli non interessano più come momenti di una spazialità concretamente praticata ma, tra le configurazioni possibili, comincia con l'assumere risalto l'angolo in una nuova accezione ad un tempo più «astratta» e «più generale».

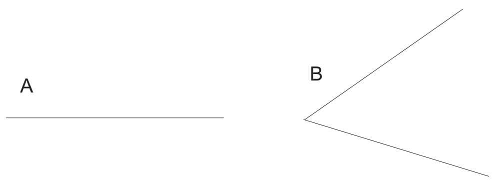
La definizione euclidea si appiglia a questo inizio di astrazione e lo porta un poco oltre: in essa ci si richiama ad una pura

[39] A. Frajese e L. Maccioni, *ibid.*, p. 67.
[40] *ibid.*

disposizione spaziale delle linee, ad una possibile relazione tra l'una e l'altra: esse sono «reciprocamente inclinate» – e se da un lato la definizione proprio attraverso il riferimento all'«inclinazione» (κλίσις) può forse adempiere un «compito descrittivo» [41], dall'altro essa è tale da superare nettamente angoli e spigoli della quotidianità, e di riunire sotto un unico termine angoli acuti, ottusi e retti.

Ma l'angolo piatto, appunto, non c'è e si potrebbe sostenere che questa circostanza sia un indizio del fatto che il versante «intuitivo» non è del tutto abbandonato, che si sarebbe potuto andare ancora oltre.

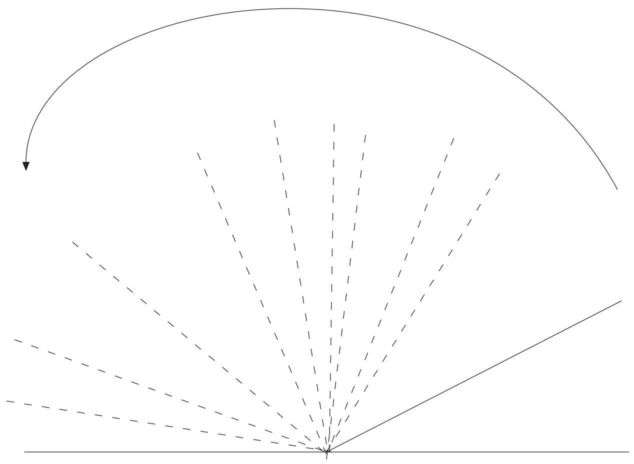
Si tratta di una affermazione in sé fondamentalmente giusta. Il punto importante da mettere in rilievo è però forse un altro, e precisamente il fatto che questa interessante lacuna mostra che in Euclide, *almeno in questo punto*, non viene resa operante una fondamentale procedura «intellettuale», una delle molte regole dell'astrarre. Questa regola consiste in una modalità di formazione concettuale che non può affatto essere descritta nei termini consueti dei «caratteri comuni» e del rapporto di genere a specie, ma consiste piuttosto nell'*esibizione di un nesso generativo*, e quindi di una relazione che sussiste in forza di un percorso possibile che conduce, *senza lacune*, dall'uno all'altro oggetto. Così facendo in realtà ci allontaniamo anche da una nozione di formazione concettuale che prenda le mosse dall'aspetto caratteristico. Una linea rettilinea ed un angolo acuto hanno in effetti un aspetto molto differente:



ed una classificazione meramente fondata nell'aspetto non giungerebbe certo ad una subordinazione sotto un unico «concetto». In una parola, facendo riferimento a «ciò che tutti gli angoli

[41] *ibid.*

hanno in comune» sembra difficile pervenire all'angolo piatto. Diversamente stanno le cose se facciamo notare in che modo la linea rettilinea possa essere raggiunta a partire dall'angolo acuto:



Parlare di angolo piatto significa indubbiamente stabilire una connessione logica tra la «posizione spaziale» che abbiamo indicato con A e la «posizione spaziale» che abbiamo indicato con B: a partire da questa posso raggiungere quella senza salti. Il parlare di connessione logica sembra qui appropriato, anche se si stabilisce una connessione tra oggetti, piuttosto che tra proposizioni.

Nello stesso tempo diventa forse più chiaro sulla base di questo esempio in quale direzione potrebbe essere fraintesa l'affermazione, in sé del tutto giusta, secondo cui possiamo ovunque trovare nel testo euclideo delle «sopravvivenze» intuitive. Non vi è dubbio infatti che la possibilità di includere tra gli angoli, anche gli angoli piatti presupponga un maggiore livello di astrazione. Eppure, stando al nostro esempio, il mutamento che interviene per accedere a quel livello riguarda ancora un pensiero che continua a trovarsi presso la figure: esso prende le mosse da una modificazione del modo di guardarle. La figura non viene colta in se stessa, isolatamente e staticamente, ma viene vista come un momento all'interno di un processo. Questa circostanza invita alla riflessione.

§ 3

L'intuizione e il buon senso – La differenza tra giochi linguistici e le loro possibili sovrapposizioni – Le definizioni euclidee guardano da due parti – Importanza della verbalizzazione.

Le nostre precedenti osservazioni mirano a far sorgere il sospetto che quei commenti che si affrettano a presentare le definizioni euclidee come residui «intuitivi» che il pensiero evoluto saprà finalmente mettere da parte, come scorie che attendono ancora di essere passate ad un filtro provvisto di più sottili trame, siano fuorvianti, nonostante una loro ovvia e superficiale validità. Il citare queste formulazioni al più per mostrare in quali secche si finisca quando si pretenda di dare definizioni esplicite dei termini primitivi è realmente un discorso troppo semplice e riduttivo, che cancella l'interesse di qualunque tentativo di gettare lo sguardo sulle dinamiche effettive delle procedure astraenti.

Altrettanto insoddisfacente è un'altra posizione che in apparenza muove, in rapporto alle definizioni euclidee, in direzione opposta e che sembrerebbe trovarsi maggiormente in armonia con la posizione che stiamo cercando di delineare. In luogo di trovare troppo «intuitive» quelle definizioni, le si trovano «controintuitive» – anzi contro il «buon senso».

Non sembra forse che urti proprio il nostro innato buon senso il parlare di una linea senza larghezza o di un punto senza parti, quasi che il togliere la larghezza possa preservare la lunghezza, o ridurre a zero il diametro di un cerchio possa preservare il cerchio stesso?

Le definizioni euclidee andranno allora difese proprio per il fatto che superano – attraverso nozioni logiche – il piano dell'intuizione. Una simile direzione di discorso in realtà ha già di mira l'idea che se vogliamo capir qualcosa della geometria in genere, euclidea o non euclidea, dobbiamo fin dall'inizio ficcarci bene in testa che in essa si tratta di «logica», e non di «intuizione».

Anche in questo caso vi è una parte di verità che viene falsata da un'epistemologia troppo elementare. Nonostante la diversità degli esiti, non si stenta a rilevare che ci troviamo di fronte ad un atteggiamento che non è poi troppo diverso dal precedente. In entrambi i casi parole come intuizione, intuitivo, ecc. – mettendo bellamente da parte un dibattito scientifico-filosofico secolare la cui stessa esistenza spesso si ha ragione di sospettare sia del tutto ignorata – vengono ad essere assimilate a espressioni come: «sapere approssimativo», «a lume di naso», «alla buona», «pregiudizi correnti», «evidenza ingannevole», «opinioni infondate e presumibilmente false», «delimitazioni concettuali prive di rigore», e infine anche, come abbiamo visto or ora, ad un «buon senso» che di buono non ha proprio nulla, ma è tutto arricchito dalle connotazioni negative presenti nelle espressioni precedenti. Curiosamente la stessa parola vuol talvolta dire anche «idea geniale», «illuminante», «chiarimento improvviso», venuto da qualche parte in modo peraltro non troppo chiaro.

Simili scelte terminologiche sono spesso il veicolo di inaccettabili semplificazioni sul terreno della teoria della conoscenza e in particolare sul problema delle relazioni tra intuizioni e concetti. In entrambe le direzioni di discorso la presa di posizione elementare che sopprime ogni problema sta, come è chiaro, nel contrapporre conflittualmente il cosiddetto «buon senso» – che includerebbe intuizione e immaginazione, ma non la capacità riflessiva del ragionamento e del calcolo – al pensiero logico-matematico il cui imperativo categorico primario sarebbe proprio quello ignorare il buon senso, costi quello che costi. L'esistenza di una complessa dialettica tra formazioni di esperienza e formazioni concettuali è semplicemente al di fuori del campo visuale di un simile punto di vista. Questa dialettica può anche essere presentata molto efficacemente come una dialettica tra «giochi linguistici».

Come abbiamo osservato, in Euclide si apre il problema di un gioco linguistico interamente diverso da quello quotidiano: quest'ultimo è strettamente legato ai bisogni della vita, ai suoi orizzonti pratici, in generale all'esperienza pratico-percettiva del mondo, alle tipologie empiriche ed alle configurazioni caratteristiche. E proprio tutto ciò deve essere *superato* e *soppresso*. Ma questa *Aufhebung* è un processo complesso, in certo senso sempre iniziato e mai esaurito.

La singolarità che ci sconcerta nelle formulazioni definitorie euclidee è dovuta al fatto che in questo processo sono possibili parziali sovrapposizioni. Quelle formulazioni stanno appunto a cavallo di giochi linguistici profondamente differenti: nel gioco linguistico quotidiano ci sono linee più o meno spesse, più o meno sottili. Ci sono punti grossi e punti piccoli – ed essi non sono affatto punti o linee del «buon senso»! Sono invece configurazioni caratteristiche, che rimangono impresse nella nostra mente, a cui abbiamo applicato dei nomi, e che possiamo facilmente riconoscere quando ci si presentano sotto il nostro sguardo – figure dell'intuizione, per l'appunto.

Accanto a questo gioco, comincia ad esservene un altro nel quale non deve aver senso parlare né di sottigliezza né di spessore della linea o di grossezza del punto.

Quando diciamo: La linea è lunghezza senza larghezza, e parliamo dunque di spessore della linea, anche se per escluderla, questi due giochi linguistici tendono a sovrapporsi parzialmente. Quella frase guarda da due parti, da un lato alla concretezza della linea *sperimentata*, dall'altro alla linea *in idea*, alla concezione astratto-geometrica della linea. Il «concepire» si allontana sempre più da un afferrare sulla base di una configurazione percettiva, da una «concezione» che deborda appena dalla «percezione», per assumere il senso vero e proprio che spetta ai concetti. La traccia dell'origine resta nella formulazione verbale. Ma *l'origine è superata nello stesso fatto che siamo alla presenza di una formulazione verbale.*

Soffermiamoci un poco su quest'ultimo punto che è della massima importanza. Prima ancora che parlare dei contenuti delle definizioni euclidee, bisognerebbe attirare l'attenzione sul fatto che in esse si è in generale alla ricerca di descrizioni *verbali* complete degli oggetti elementari della geometria.

Si avanza qui una pretesa di cui non si era mai avvertita l'esigenza, e proprio tenendo conto di essa si comincia a comprendere in che senso si inaugura un «gioco linguistico» interamente nuovo. È infatti interessante chiedersi che forma assumerebbe la definizione di parole come punto, linea, cerchio, ecc. restando sul piano dell'esperienza pratico-percettiva delle forme.

Pensiamo al modo in cui ci comporteremmo di fronte al problema di fare apprendere ad un bambino il significato di parole di questo genere. Certamente non cercheremo di introdurre la parola punto o retta dicendo o tentando di *dire che cosa essa è.*

Ad esempio *non* diremo: punto è «ciò che non ha parti»; *ed ora disegna un punto.* Oppure linea è «lunghezza senza larghezza» ed *ora disegna qualcosa che è lungo, ma non è largo.*

Presumibilmente mostreremo noi stessi un punto o una linea diritta su un foglio di carta, impiegando nello stesso tempo la parola corrispondente e poi, dopo aver ripetuto eventualmente in vari modi queste operazioni, con qualche variante tendente a mettere in evidenza aspetti importanti e non importanti, lo inviteremo a disegnare una linea o un punto, esprimendo approvazione o disapprovazione fino a quando potremo essere ragionevolmente certi che la parola in questione è entrata a far parte del suo gioco linguistico, e in questo senso essa è stata compresa.

Ciò che è talora chiamata «definizione ostensiva» – con terminologia del tutto impropria per il fatto che essa si mantiene ostinatamente abbarbicata al «definire», all'idea del *dire* ciò che una cosa *è* – oltre a non essere una definizione affatto, non è nemmeno una pratica ostensiva semplice, è invece un *insieme di pratiche* di varia natura, un «insegnamento ostensivo» del quale fanno naturalmente parte anche le parole, ma si tratta di parole integrate in una grande varietà di gesti, di comportamenti, di atti mimetici, di raccomandazioni, persino di sottintese minacce, che hanno lo scopo di addestrare ad impiegare «correttamente» le parole di nuova introduzione[42].

Ciò che con questo insieme di pratiche viene evitata *è proprio la definizione verbale,* mentre, nei primi passi della geometria come scienza, si cerca al contrario di affidare al linguaggio e – come una linea di tendenza che già si annunzia –

[42] Per la nozione di «insegnamento ostensivo» così interpretata cfr. L. Wittgenstein, *Ricerche filosofiche*, oss. 8-16. Benché Wittgenstein parli di un *hinweisend definieren*, tutta la discussione è una critica dell'interpretazione della definizione ostensiva come una pura e semplice ostensione indicativa del rapporto tra nome e oggetto. Il parlare di «insegnamento ostensivo», comprendente un insieme molto vario di pratiche, sembra dunque essere particolarmente appropriato.

soltanto ad esso, ciò che la figura è o deve essere.

In questo senso abbiamo le nostre buone ragioni per affermare che per il solo fatto che nelle definizioni euclidee si tenti di introdurre i termini mediante parole *si opera un netto distacco dal piano pratico-percettivo*, manifestando il nostro dissenso da chi si affretta a segnalare come una sorta di residuo negativo la presenza di componenti intuitive e immaginative nelle definizioni di Euclide e nelle proposizioni che fanno parte dell'apparato fondazionale, così come del resto anche dalla pretesa che in esse ci troveremmo di fronte ad un puro e semplice conflitto con il «buon senso».

§ 4

Sulla prima proposizione degli Elementi di Euclide – In essa si formula un compito costruttivo – Lo scopo della costruzione è tuttavia quello di mostrare le connessioni interne della figura – Ogni passo della costruzione deve essere giustificato.

Abbiamo più volte sottolineato che l'esperienza delle figure non riguarda la semplice visione, ma anche la possibilità di plasmarle e riplasmarle, di riprodurle in immagine. L'esperienza delle forme è un'esperienza del fare. Esse dunque possono essere guardate come prodotti e un problema relativo alle proprietà delle forme potrebbe essere riformulato in rapporto al modo in cui esse sono state prodotte.

Consideriamo la prima proposizione di Euclide – quella a partire dalla quale, dopo l'esposizione delle nozioni fondamentali, si delinea il grande progetto di una teoria deduttiva: ci troviamo di fronte non già ad una proposizione che enuncia uno stato di cose, il sussistere di una certa relazione o di una certa proprietà.

In essa si formula un compito costruttivo, si pone un problema che sembra essere essenzialmente di realizzazione grafica:

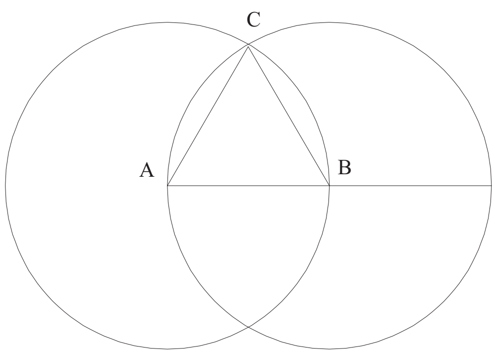
Su una retta terminata costruire un triangolo equilatero

Nella formulazione linguistica, dunque, non compare affatto una tesi relativamente ad una proprietà di un certo oggetto, ma un compito che deve essere portato a buon fine.

La formulazione «come dovevasi dimostrare» che chiude le dimostrazioni nei nostri manuali elementari non è originaria di Euclide. La formula conclusiva euclidea corrisponde alla formulazione del compito, e dice dunque propriamente «come dovevasi fare».

Nel momento in cui la geometria che è giunta ad un tale stadio di sviluppo da potersi proporre come una teoria in senso pregnante, come una teoria deduttiva, siamo anzitutto invitati a prendere carta e matita, riga e compasso ed a metterci al lavoro. Notato questo punto tuttavia, e non appena ci accingiamo alla costruzione che la proposizione ci propone, ci rendiamo conto di un'altra circostanza fondamentale che in realtà ci fornisce il senso autentico del compito proposto: *la costruzione interessa in quanto essa è in grado di esibire dei passi internamente giustificati, cioè che hanno la loro giustificazione nelle connessioni interne della figura*. Lo scopo è di mostrare queste connessioni e di mostrarle non già come *dati di fatto rilevati nella mera osservazione della figura*, ma come nessi determinati dal modo stesso in cui la figura è generata, e dunque come nessi appartenenti alla sua essenza.

Consideriamo come procede la costruzione del triangolo sulla «retta terminata». Ci viene anzitutto richiesto di puntare alternativamente il compasso in A e in B e di realizzare due cerchi che si intersecheranno nel punto C. E poi di congiungere i punti A e B con il punto C. Si ottiene così il triangolo ABC.



Ora, ciò che importa sono le ragioni per le quali possiamo dire che abbiamo costruito un triangolo equilatero, non il dato di fatto della costruzione del triangolo equilatero. Alla costruzione è affidato unicamente il compito di esibire queste ragioni.

Da un lato dunque è vero che l'impostazione del problema assume la forma di una costruzione, e questo rammenta l'origine dalla pratica con le figure. Dall'altro le componenti empirico-fattuali di questa pratica sono nettamente oltrepassate in una direzione di discorso essenzialmente diversa.

Questo oltrepassamento è dimostrato soprattutto dal modo in cui si argomenta che, facendo così, il triangolo costruito è effettivamente equilatero. Esso è tale per via della eguaglianza dei raggi, di AB con AC e di AB con BC – e dunque anche di AC con BC.

In realtà si potrebbero presentare le cose in tutt'altro modo.

Il problema sia appunto quello di realizzare un triangolo equilatero su un segmento dato. Se vuoi realizzare questo compito devi fare così e così – devi puntare il compasso in A e poi in B. Devi congiungere poi il punto di intersezione C con A e con B. Facendo in questo modo otterrai un triangolo equilatero, *come ti potrai convincere misurando i lati e constatando che essi sono eguali*.

Se presentassimo le cose in questo modo tutto si ridurrebbe ad una precettistica pratica e la conferma della bontà del risultato verrebbe poi da una constatazione empirica, dalla *misurazione*. Come se dicessimo: si è sempre fatto così, si è trovato che questo è un buon metodo ovvero che questa procedura ha sempre dato buoni risultati.

Invece la prima proposizione non dice affatto questo, non ha affatto questo senso, né implicitamente né esplicitamente. L'esistenza di una relazione geometrica non trae conferma da una misurazione empirica, così come dal successo praticamente sperimentato di un metodo o di una procedura di costruzione.

Ma da ciò segue che questa procedura *non ha bisogno di essere concretamente realizzata*: è sufficiente il *pensiero della possibilità di una simile procedura* e le conseguenze che io posso trarre da questo pensiero. Naturalmente una modificazione corrispondente subiscono le oggettività prodotte e gli enunciati su queste oggettività. Siamo appunto nel campo delle idealità. Più precisamente: *stiamo cercando di spiegare che cosa significhi essere nel campo delle idealità.* Fa indubbiamente parte di questa spiegazione il fatto che la costruzione non solo debba essere giustificata ad ogni suo passo, ma anche che la giustificazione debba essere trovata restando strettamemente *all'interno* degli *Elementi*. Poiché questa proposizione è appunto la prima, allora non potremo fare altro che richiamarci a tale scopo alle definizioni, ai postulati e alle nozioni comuni che fanno parte dell'apparato fondazionale della teoria.

Rivediamo da questo punto di vista la realizzazione del compito enunciato dalla prima proposizione nei passi in cui essa può essere suddivisa.

Il *primo passo* è quello di delineare il cerchio con centro in A e raggio AB. Il *secondo passo* consiste inversamente nel delineare il cerchio con centro in A e raggio BA. Ma questi due passi non sono affatto dati per compiuti e nulla più. Essi debbono invece essere *giustificati*, e proprio a questo scopo vi è un rimando anzitutto al *Terzo Postulato*, il quale afferma che possiamo sempre tracciare un cerchio con un raggio qualsiasi.

Come terzo passo, si tracciano dal punto C, in cui i cerchi si intersecano, le linee congiungenti C con A e con B. E naturalmente anche questo passo deve essere giustificato – cioè deve essere giustificato il fatto che sia possibile tracciare quelle linee esattamente come nel caso precedente dei cerchi. Il rimando è qui al *Primo postulato*: È sempre possibile tracciare una linea da un qualsiasi punto ad ogni altro punto[43].

Abbiamo infine – non tanto un quarto passo – quanto una *considerazione conclusiva* che deve effettuare il passaggio alla formula «come dovevasi fare». Si tratta di confermare che il triangolo costruito nei passi precedenti è effettivamente un triangolo equilatero, e per questo forniamo una giustificazione intrinseca che può essere tratta dal peculiare metodo di costruzione del triangolo stesso. Si sono tracciati dei cerchi: e la ragione del-

[43] In realtà dovrebbe essere giustificato anche il fatto che le due circonferenze si intersechino in un punto. Per un commento più dettagliato si vedano in ogni caso le note di Frajese e Maccioni in Euclide, *Elementi*, cit., pp. 77-78.

la equilateralità sta nella *Definizione XV* che riguarda *l'eguaglianza dei raggi come condizione definitoria del cerchio*; e nella *Prima nozione comune* che riguarda la *transitività dell'eguaglianza e* che rende possibile l'impiego di questa condizione in rapporto al problema proposto. Del resto, non è affatto ovvio accingersi a disegnare un triangolo tracciando cerchi!

§ 5

La questione dell'evidenza – È evidente il primo postulato? – E il terzo? – E che dire del quinto postulato? – Crisi dell'intuizione e crisi dell'evidenza – Quattro possibili accezioni del termine evidenza – Logica delle figure e logica delle proposizioni – La sospensione del senso nel passaggio alle nuove geometrie – Evidenze ed assunzioni.

Per chiarire la direzione principale dei nostri discorsi ed il loro intento, i postulati (αἰτήματα) euclidei, a cui abbiamo accennato poco fa, fanno allo scopo. Nella filosofia è spesso necessario ripensare ad un problema senza sentire troppo il peso di dibattiti secolari. Potremmo allora immaginare che Euclide in persona ci venisse incontro dicendo con voce grave:

Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro.

Come è strana questa affermazione esaminandola per quello che letteralmente dice! Ed è strana, a seconda di come la si intende, per ragioni molto differenti, e persino opposte.

Ad esempio, potremmo osservare che è del tutto *evidente* che si possa, dati due punti, tracciare una linea tra essi. *Ma perché vi è bisogno di dichiararlo*? Anche in questo caso, come in quello delle definizioni, dobbiamo dare l'importanza che merita al fatto che si operi una verbalizzazione esplicita. Che cosa propriamente viene verbalizzato? Una tacita evidenza, una verità apodittica – e di origine «intuitiva» – o una mera assunzione la cui necessità è puramente interna al gioco linguistico? Io credo che il dibattito su questo punto sia stato spesso falsamente impostato da un lato per via degli equivoci connessi al problema dell'evidenza, dall'altro per il fatto che si è venuta fossilizzando e irrigidendo una contrapposizione che in realtà ha una sua mobilità e ricchezza interna.

Intanto va subito notato che anche qui, come nel caso delle definizioni, la verbalizzazione esplicita dimostra l'intento di creare un netto distacco dal discorso quotidiano – quindi fa parte del progetto di porre *ogni* presupposto *dentro* il gioco linguistico, e non fuori di esso.

Quanto alla questione dell'evidenza, ed addirittura ad un'evidenza fondata sull'intuizione – il tenore della risposta dipende certamente dal modo in cui intendiamo questo termine[44].

Se con intuizione intendiamo il rimando ai contesti pratico-concreti dell'esperienza, allora quell'affermazione è *tutto meno che evidente*. Infatti tra un punto A ed un altro punto B io non potrei tracciare proprio nessuna linea (diritta) *se tra A e B ci fosse un alto muro*. L'evidenza del terzo postulato è ancora minore dal momento che è chiaro che non potrei affatto tracciare un cerchio *se il suo raggio fosse troppo grande*.

Inversamente, la possibilità di tracciare tra due punti una linea o di tracciare un cerchio, quando sono soddisfatte *le normali condizioni* che sono *tacitamente sottintese* quando ci viene richiesto di tracciare una linea o un cerchio – essa è tanto ovvia da non aver bisogno nemmeno di essere enunciata.

Si comprende la grande novità rappresentata dall'*enunciazione* dei postulati. La possibilità che è qui in questione non è una possibilità che fa parte del *nostro* mondo: i punti, le rette e i cerchi di cui in essi si parla sono *oggetti di genere interamente nuovo*, sono oggetti che appartengono ad un *altro universo*, e questa *alterità* comincia a sussistere proprio nel momento in cui io enuncio che tra essi *si può* sempre tracciare una retta: *si può, perché all'universo a cui appartengono i punti* non può *appartenere qualcosa come un alto muro.*

44 In tutta la nostra discussione non prendiamo in considerazioni quelle interpretazioni modernizzanti, del tutto equivoche ed improbabili, che fanno di Euclide un «anticipatore» del punto di vista delle proposizioni fondamentali come «mere assunzioni», e quindi che tendono a presentare Euclide come un convinto convenzionalista.

In certo senso la possibilità empirica di tracciare una linea tra due punti sulla lavagna potrebbe rappresentare una sorta di *azione introduttiva*: io vi mostro che posso tracciare tra due punti qualsiasi sulla lavagna una linea che li congiunge, e vi mostro alcuni esempi, ma con ciò non intendo provare qualcosa di fin troppo ovvio; e cioè che posso fare questo dal momento che lo faccio. Intendo invece *preparare* una *sorta di radicale ribaltamento*, nel quale si propongono *nuovi oggetti* che risultano *ricostituiti su un piano interamente diverso*: la semplice enunciazione della possibilità esplica una vera e propria *azione ontologicamente produttiva* in quanto formula una delle condizioni che *pone in essere* quel tipo di oggetto che è, nell'universo geometrico, il punto e nello stesso tempo anche, istituendo una relazione tra punti e linea, di quel tipo di oggetto che è la linea. Quell'azione introduttiva è ad un tempo essenziale e inessenziale. Essa è essenziale per *generare* il senso, inessenziale per *confermarlo*.

Cose all'incirca analoghe sosterremmo anche in rapporto al quinto postulato. Nella sua formulazione comunemente nota esso dice:

Per un punto passa una sola parallela ad una retta data.

Ed il commento continuamente ripetuto, che deve preparare la meraviglia degli incauti di fronte alla sua negazione ed alla celebrazione definitiva della logica di fronte all'intuizione, sarà naturalmente: questa è una circostanza che ci appare «intuitivamente evidente». Oppure: alla nostra «intuizione spaziale» sembra che le cose stiano effettivamente così. «La forma dell'unicità è certo assai intuitiva: alla nostra intuizione sembra impossibile che per uno stesso punto passino più parallele ad una retta data» [45].

A dire il vero quando si parla di «evidenza intuitiva» oppure di «intuizione spaziale» si hanno di mira, sia pure implicitamente, cose piuttosto diverse: nel primo caso, l'evidenza intuitiva è il «lume di naso», il «buon senso». Nel secondo invece – a meno di una confusa allusione alla posizione kantiana – si pensa ad una collezione di convinzioni intorno allo spazio, ve-

[45] A. Frajese e L. Maccioni in Euclide, *Elementi*, cit., p. 72.

nute chissà da dove, certamente non passate al vaglio della logica, e dalle quali, a tutta prima – così si sostiene – non vorremmo staccarci.

Abbiamo già detto che non ci sembra di poter trarre alcuna utilità dalla prima accezione. Ma è lecito dubitare che anche la seconda ci possa orientare nella giusta direzione. Non credo che ci sia nessuno che sia in grado di enunciare sui due piedi le proprie convinzioni intorno alla spazio – la questione sembra già essere alquanto filosofica!

Come stanno dunque le cose se le guardiamo dal nostro punto di vista?

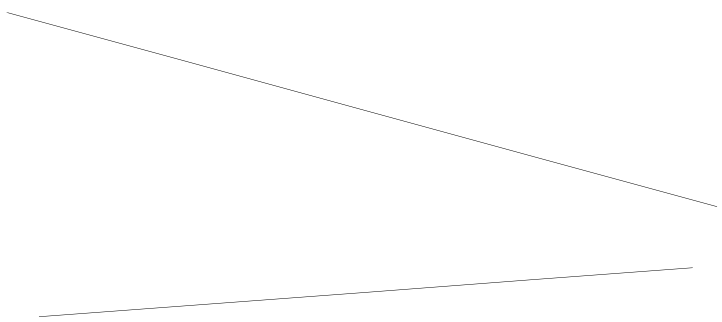
Per dare una risposta a questa domanda converrà fare un passo indietro, alla definizione del parallelismo, la XXIII, nella quale si dice che:

Parallele sono quelle rette che, essendo sullo stesso piano e venendo prolungate illimitatatamente dall'una e dall'altra parte non si incontrano tra loro da nessuna delle due parti.

In rapporto ad essa porremo nuovamente l'accento sul fatto che in questa definizione, come in tutte le altre, si sta a cavallo tra due giochi linguistici profondamente differenti.

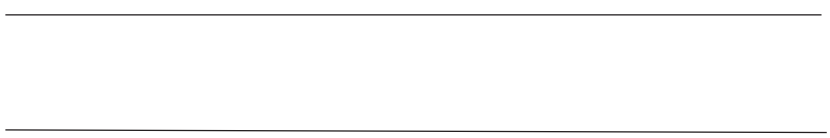
Attenendoci al piano dell'esperienza noi abbiamo a che fare con andamenti caratteristici, con configurazioni tipiche.

La seguente configurazione, ad esempio



ha un carattere sulla base del quale potremmo dire che «prima o poi» le due linee si incontreranno. Peraltro si tratta di una formulazione che presuppone una componente di ordine immaginativo: le linee che abbiamo di fronte sono quelle che sono, e non sono affatto movimenti. In certo senso, se ci esprimiamo così, esse sono intese come immagini di movimenti. Oppure ci si rappresenta, per dir così, tacitamente il gesto del tracciare le linee come se ci fosse qualcuno che proprio ora le sta tracciando: dicendo che le due linee si incontreranno anticipiamo il risultato che realizzerà tra poco la tendenza in esse evidente.

La stessa cosa si potrebbe naturalmente dire per il parallelismo. Considerato al di fuori del gioco linguistico geometrico, e quindi sul piano «intuitivo», il parallelismo è essenzialmente una configurazione percettiva che ha il suo andamento caratteristico il cui tipo può essere insegnato ed appreso ostensivamente:



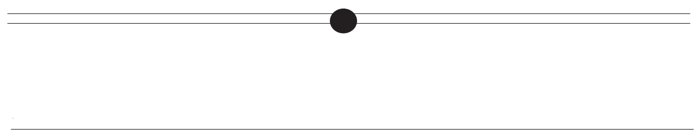
Di questo insegnamento ostensivo non farà certamente parte l'istruzione: si disegnino due rette che, prolungate illimitatamente, non si incontrino mai. Diremo invece di disegnare due rette che abbiano l'andamento caratteristico del parallelismo, andamento che avremo mostrato ricorrendo a svariati mezzi. Tra essi naturalmente potrebbe essere impiegata efficacemente la contrapposizione tra questa configurazione tipica e quell'altra nella quale viene subito evocata l'idea, anzi, si sarebbe quasi tentati di dire, la fantasia di un possibile incontro. L'esibizione di differenze e di contrapposizioni fa probabilmente parte dell'apparato di metodi in cui consiste l'insegnamento ostensivo.

Che nella definizione di Euclide si prendano le mosse da queste configurazioni e che di esse rimanga ancora qualche traccia sarebbe difficile negarlo; ma altrettanto difficile sarebbe negare l'approdo ad un gioco linguistico le cui regole si stanno proprio ora approntando e, insieme alle regole, anche gli oggetti su cui esse vertono.

Supponiamo ora che qualcuno, per metterci alla prova, ci chiedesse a bruciapelo che cosa ne pensiamo intorno alla faccenda del quinto postulato, se per «la nostra intuizione» esso ci appaia senz'altro come evidente – oppure se ci sembri possibile condurre per un punto più di una parallela ad una retta data. Ammettendo che si sia superato un certo sconcerto indotto dalla domanda (anch'essa pretende di stare a cavallo tra due giochi linguistici), cercando una risposta forse penserei all'andamento caratteristico delle parallele, e troverei che questa possibilità genererebbe configurazioni a cui non attribuirei la caratteristica del parallelismo. Ma se per questo dicessi: *non si può tracciare più di una parallela!* ciò non significa affatto la stessa cosa che questa proposizione significa *nel contesto della geometria euclidea. Non si tratta di una frase appartenente ad una geometria in genere*.

A meno che non mi venga in mente un altro modo per risolvere la questione.

Disegno un punto *molto grosso*, e posso dirti allora che di parallele per un punto ad una retta ne possono passare almeno due:



«Ma allora non hai capito nulla!». Forse. Il fatto è che mi è stato chiesto di adottare un punto di vista intuitivo, e così ho fatto. Ed ora sono preso dal dubbio che non abbia invece capito qualcosa chi asserisce che quella proposizione sembrerebbe garantita dall'intuizione al solo scopo di sancire, con il richiamo immediato alle geometrie non euclidee, la sua irreversibile «crisi» .

Naturalmente per molti secoli quella proposizione è stata ritenuta o evidente in se stessa o dimostrabile a partire da evidenze, ma questa circostanza non può rappresentare per noi un'obiezione. Infatti essa attira la nostra attenzione sulla necessità di interrogarsi sulla molteplicità di sensi che la parola «evidenza» può ricevere, e dunque anche per chiarire quale evidenza la scienza e l'epistemologia moderna ha effettivamente messo in crisi.

Se consideriamo il modo in cui abbiamo sviluppato la nostra discussione, non è difficile rendersi conto che vi sono almeno *quattro nozioni* di evidenza che da parte nostra *non vengono* *certamente difese*, ed anzi non assolvono propriamente nessun ruolo. Si tratta

1. dell'evidenza intesa come *illuminazione interiore della verità apodittica*, l'evidenza dunque come fenomeno psicologico;

2. dell'evidenza come connessa ad una *idea della razionalità metafisicamente garantita*;

3. dell'evidenza come nozione connessa con l'intuizione intesa come una specialissima forma di conoscenza, che *si contrappone* alla conoscenza razionale in genere. Le evidenze intuitive vengono allora considerate come conoscenze autentiche, inaccessibili tuttavia ai mezzi della razionalità e possono rappresentare la base, come in Schopenhauer o in Bergson, di una metafisica non-razionalistica, ma anche di una filosofia della matematica, come accade in Brouwer. Restando sul versante filosofico, questa terza nozione può essere subordinata alla seconda, assolvendo normalmente lo scopo di assicurare un fondamento ad una costruzione di ordine metafisico.

4. infine dell'evidenza nel modo in cui può presentarsi all'interno di una *considerazione trascendentalistica* di stile kantiano. Quest'ultima, almeno nella sua interpretazione corrente, perviene all'idea di leggi a priori della spazialità *reale* che sarebbero date intuitivamente, in un senso che peraltro ha ben poco da spartire con il «buon senso» e l'«ingenua opinione», ma che per essere spiegato richiederebbe l'intero armamentario del punto di vista trascendentalistico kantiano. Come si sa, lo spazio è, secondo Kant, forma a priori dell'intuizione, e tutto fa pensare che se fosse interrogata sull'argomento «spazio» l'intuizione kantiana ci fornirebbe null'altro che le regole fondamentali della geometria *euclidea*. E poiché ogni oggettività intuita è data appunto in questa forma, la geometria euclidea farebbe corpo con la realtà stessa – essa è la geometria del reale stesso.

Ciò che viene messo in questione dalle geometrie non euclidee non è l'evidenza intuitiva in genere: ma è sia la concezione «psicologica» che quella «metafisica» dell'evidenza, sia nella variante razionalistica che in quella non razionalistica, qualora naturalmente – e questa è una precisazione importante – l'una o l'altra o entrambe siano richiamate per sostenere l'incontestabilità assoluta del quinto postulato.

Per ciò che riguarda la concezione trascendentalistica, il concetto filosofico di «intuizione» in essa elaborato non può certo uscirne indenne. Lo stesso rapporto tra spazio geometrico e spazio fisico – che forse in passato non è mai stato veramente problematico e che poteva essere proposto più o meno esplicitamente secondo un'angolatura platonistica, in base alla quale lo spazio fisico-reale deve essere considerato come un'approssimazione ad una rete di rapporti ideali che troverebbero nella geometria la loro manifestazione più pura – ha cessato di essere ovvio nel momento in cui si è resa chiara la differenza tra il piano di un'*elaborazione teorica che può svilupparsi secondo le proprie leggi immanenti*, e il piano dell'*applicazione* della teoria ad una realtà effettivamente sussistente. Ma come abbiamo osservato, *queste nozioni dell'intuizione* e della problematica dell'evidenza connessa ad esse non assolvono propriamente *nessun ruolo all'interno della nostra discussione*.

Tutta l'attenzione è rivolta piuttosto all'idea di una *spazialità sperimentata* da cui prendono l'avvio i processi di idealizzazione[46], secondo una prospettiva che mantiene la massima *mobilità*: sia per il fatto che con spazialità sperimentata si intende una molteplicità di spazi correlati a modalità differenti di esperienze possibili, sia per il fatto che non vi è da nessuna parte una mappa sulla quale sarebbero prescritti i percorsi di quei processi. Abbiamo notato più volte che si tratta di processi di *allontanamento dal mondo dell'esperienza* – e non è prescritto quanto vicino o quanto lontano ci possiamo spingere, con quali mezzi, in che modo e con quali risultati.

Il parlare di nuovo gioco linguistico già per la geometria euclidea implica anzitutto che il concetto plasmato sulla pura configurazione tipica comincia con l'essere messo a distanza, mentre si fa avanti l'idea che questo gioco non consista nella presentazione delle strutture metafisico-ontologiche o trascendentali del reale, ma piuttosto in una costruzione del pensiero che ha le

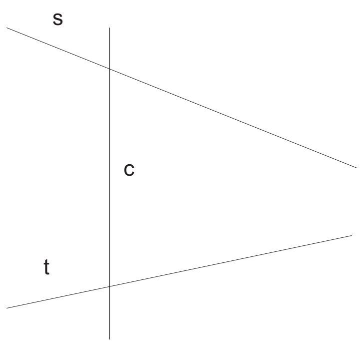
[46] Questo è il grande tema assente nell'impostazione kantiana. Proprio per il fatto che la teoria di Kant ha fin dall'inizio di mira la possibilità della conoscenza *oggettiva*, la sua estetica fallisce i compiti fenomenologici di una autentica filosofia dell'esperienza.

proprie regole di legittimazione interna. Allora altri giochi sono certamente possibili, e solo il pensiero stesso potrà mettere limiti oppure toglierli, ed in questo senso potrà anche avvalersi dell'atto «creativo» del far valer questo postulato o quest'altro.

Profondamente insoddisfacente è invece il presentare l'intera questione come una pura vittoria della logica sull'intuizione, l'una all'altra elementarmente contrapposte, a partire dall'idea di una assiomatica formale considerata in un quadro filosofico connotato della retorica convenzionalista della «mera assunzione».

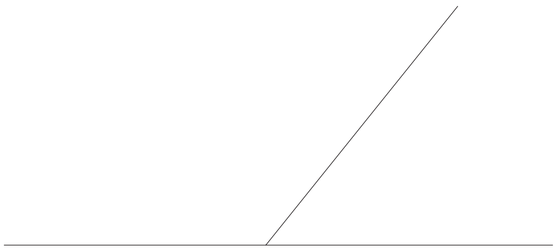
Cerchiamo di motivare meglio questa nostra insoddisfazione ritornando sui nostri esempi. È necessaria indubbiamente una certa spericolatezza, per trarre da essi un effettivo profitto. Ma val la pena di correre qualche rischio per vederci un po' più chiaro sull'impostazione generale della questione.

Di fronte alla figura seguente



potrei dire che è del tutto evidente che le rette t ed s si incontreranno dalla parte in cui gli angoli sono acuti. Oppure non dovrei dirlo? O dovrei dire che credo soltanto che lo sia, che così mi sembra ma forse non è? Che dopo le geometrie non-euclidee la diffidenza, sotto questo riguardo, non è mai troppa?

Abbiamo già notato che, in ogni caso, qui si va un poco oltre ciò che «letteralmente» si vede. Ad esempio, la figura seguente



presenta angoli adiacenti, l'uno ottuso e l'altro acuto. Ma sulla sua base io posso anche affermare che variando l'angolo acuto varierà anche l'angolo ottuso e secondo una precisa regola: ad un «sempre più» da un lato, deve corrispondere un «sempre meno» dall'altro. Andiamo così un poco oltre ciò la figura in se stessa presenta, anche se questo superamento appartiene ai dinamismi possibili della percezione. Questo senso è intessuto nella figura nella misura in cui ne colgo la struttura ed afferro in essa una possibilità di variazione. Questa possibilità sta nelle pieghe intenzionali di questo afferramento. La forma spaziale viene talvolta a torto indicata come un vero e proprio «simbolo» della staticità. Vi è invece un modo di guardarla che la mette in movimento, essa è-così in un poter-divenire-altro, secondo possibilità coerenti di variazione e di trasformazione.

Sulla base della figura precendente potrei formulare una regola intorno al «sempre più-sempre meno» ed anche questa regola avrebbe il carattere dell'evidenza. In rapporto ad essa il «buon senso» non ha niente da dire in proposito. Nemmeno è il caso di richiamarsi a una «vaga opinione», dal momento che in realtà non si tratta di un'opinione affatto.

Ma a che livello si trovano evidenze come queste? La risposta a questa domanda non è troppo a portata di mano anche se abbiamo già ampiamente preparato ad essa il terreno. Il punto di partenza è certamente la configurazione e l'andamento caratteristico. Ma ciò non significa che ci si attenga al puro piano delle constatazioni empiriche. La figura ha infatti la propria esemplarità, e in base ad essa è possibile operare una generalizzazione che non è affatto una generalizzazione induttiva.

Si tratta dunque di evidenze che riguardano la logica interna della figura, logica che è afferrata in inerenza alla figura stessa.

Vi è una *logica delle figure*: questo è un punto di particolare importanza. La geometria sorge dal pensiero di *rendere esplicita* questa logica, con la quale essa dunque anzitutto a che fare. Nello stesso tempo il pensiero geometrico opera una totale trasvalutazione delle figure ricreandole come nuovi oggetti; in questa trasvalutazione e ricreazione entra in azione il pensiero con la sua autonoma capacità produttiva, con le proprie regole: l'oggetto ricreato viene *vincolato alla proposizione,* ed una logica originariamente inerente ai nessi oggettuali, che resta peraltro puramente implicita, viene resa esplicita, ripresa e nello stesso tempo rinnovata, all'interno di una *logica dei nessi proposizionali*, all'interno di una costruzione deduttiva.

Questo aspetto assume particolare significato proprio in rapporto ai problemi posti dal quinto postulato. La sua storia più volte narrata può avere una morale piuttosto diversa da quella che di solito si cava da essa. Chiediamoci ingenuamente: perché il grande rovello non è cominciato dal primo postulato piuttosto che dal quinto, perché invece di tentare di derivare il quinto postulato da tutti gli altri non si è tentato di derivare il primo?

La risposta è molto semplice: è il quinto postulato, e non il primo, che si presentava nella sua formulazione linguistica come molto simile ad un teorema, e vi erano dei teoremi che sembravano nella loro formulazione molto simili a quel postulato. Quindi *il dubbio ha sempre riguardato la posizione del quinto postulato all'interno del sistema deduttivo,* ha riguardato soprattutto la *logica dei nessi proposizionali***,** e non la *logica interna della figura* così come essa si trova nella sua evidenza pregeometrica. È accaduto poi che badando a questa logica si affacciasse la *possibilità* di un sistema coerente nel quale compariva in luogo del quinto postulato, una proposizione incompatibile con esso, e si decise di avventurarsi su questa strada.

Questa decisione aveva dalla propria parte due circostanze fondamentali: in primo luogo gli oggetti della geometria sono in ogni caso costruzioni del pensiero – e naturalmente già a partire dal *punto senza parti* di Euclide. In secondo luogo tra la logica delle figure e la logica delle proposizioni, che sono insieme intrecciate nel pensiero geometrico, spetta al pensiero stesso decidere se, in un certo punto del cammino, convenga dare la priorità alla seconda piuttosto che alla prima. È esattamente e solo a questo punto che interviene l'*assunzione*: assumo che valga come postulato che per un punto possano passare, ad esempio, due parallele ad una retta data. Il postulato euclideo delle parallele e questo postulato non sono affatto sullo stesso piano dal punto di vista epistemologico. *Il primo ha un antefatto nella logica delle figure, il secondo ha un antefatto nella logica delle proposizioni*. Il primo appartiene ad un gioco linguistico che avanza la pretesa della chiusura e del superamento dei dati esperienziali, e tuttavia mantiene un rapporto con essi potendo questi dati fornire un qualche sostegno al significato delle parole che compaiono in esso. Il secondo invece appartiene ad un gioco linguistico in rapporto al quale abbiamo deciso che gli interessi sintattici debbano avere, almeno per un certo tratto, la prevalenza su quelli semantici.

Nelle «nuove geometrie» il significato delle parole diventa tendenzialmente indeterminato. Poiché è cambiata la regola, è cambiato anche l'oggetto. Con retta, parallelismo, angolo, ecc. non si intende più ciò che si intendeva prima. Anzi, più precisamente: ora non è per nulla chiaro che cosa si possa o si debba in generale intendere con quelle parole. Il loro senso è tenuto in sospeso. Di contro *la loro sintassi è perfettamente determinata*. Si affaccia così, *prima come una necessità piuttosto che come una conquista*, l'adozione di un punto di vista assiomatico-formale che sancirà la differenza tra sintassi e semantica, tra sistema formale e sua interpretazione con autentica chiarezza teorica.

I fatti sono gli stessi, la loro versione è tuttavia un po' cambiata rispetto a quella consueta, ed anche le conclusioni e i commenti sembrano essere piuttosto diversi. In effetti non vi è modo di innestare su tutto ciò un discorso troppo semplice sulla «crisi dell'intuizione» per almeno due motivi: la soppressione del concetto «intuitivo» non ci porta in dono dei concetti «migliori», ma tende a trasformarsi in una soppressione dei concetti in genere, cosicché l'elogio della logica e del pensiero puro orientato esclusivamente in questa direzione sembra piuttosto controproducente, se è destinato ad approdare ad un elogio dell'assenza di senso. Di contro potrà essere considerato un'importante conquista l'attribuzione di una semantica possibile ai nuovi sistemi teorici.

Il secondo motivo sta in una circostanza di cui ben poco, e non a caso, si richiama l'attenzione all'interno di un dibattito epistemologico che sia influenzato da una prospettiva convenzionalista: si parla infatti di assunzioni come se si trattasse semplicemente di scegliere una alternativa qualunque, tra le molte possibili, quasi che la stessa idea di una giustificazione ci trascinasse verso una pericolosa china. Al contrario si potrebbe forse affermare che *mere* assunzioni, quindi assunzioni che sono *niente altro che* assunzioni, nella matematica non si fanno forse *mai*. Le assunzioni sono sempre *ben meditate*: è proprio il caso di dirlo. Si *conviene* su ciò che per varie *ragioni* può apparire *conveniente*. Naturalmente non si tratta di convenienze o di interessi pratici. Prima di un'assunzione c'è un problema, c'è una «storia» che la introduce e rende conto di essa. Dopo di essa c'è il seguito di questa storia nel corso della quale si effettuano nuove verifiche sulle ragioni di quella scelta.

Vi sono assunzioni che appaiono non *interessanti* e che pertanto non vengono nemmeno prese in considerazione. Fino ad ora nessuno ha preso in considerazione la possibilità che per un punto possano passare solo ed esattamente sette parallele ad una retta data. Se si avesse la generosità di dare una chiara risposta a questa stravagante osservazione, si offrirebbero probabilmente molti motivi per una riflessione piuttosto seria.

Essa finirebbe con il vertere sulle regole che orientano implicitamente o esplicitamente il pensiero nel proprio fare produttivo, sulle procedure messe in opera, sui criteri che vengono via via fatti valere nell'attività «ideante». Intorno a queste regole e procedure la contrapposizione tra logica e intuizione ha troppo poco da insegnarci. Che la chiave del progresso del pensiero astratto si riduca ad una vittoria sulle resistenze dell'intuizione apparirebbe come una concezione assai modesta non solo dal punto di vista teorico, ma anche storico. Vi è in realtà una complessa interazione tra diverse istanze, un andirivieni tra piani diversi, un complesso gioco di stimoli e di freni.

Altrettanto poco ha da insegnarci la contrapposizione tra logica e intuizione impiegata nella direzione inversa, secondo una concezione che ha probabilmente il suo modello più vigoroso e drastico in Schopenhauer[47]. Far riferimento a posizioni estreme, sostenute con la massima imprudenza, è talvolta particolarmente utile perché esse mostrano chiarezza i nodi effettivi della discussione, oltre a dare immediato risalto a limiti e pregi. Schopenhauer si scatena contro il metodo «euclideo», che per lui fa tutt'uno con il metodo deduttivo, sostenendone l'improduttività e la superfluità con tanta spericolatezza da alienarsi ogni possibile simpatia anche da parte di coloro che avrebbero potuto forse condividere alcune sue istanze di fondo. In realtà, se si ripensa questa critica della deduzione alla luce delle considerazioni già ampiamente presenti nella *Quadruplice radice del principo di ragione sufficiente*, situandole all'interno di un quadro interpretativo che la nostra discussione suggerisce, si deve riconoscere che ciò che vi è di prezioso nella posizione di Schopenhauer sta nella difesa quanto mai energica di quella che noi abbiamo chiamato *logica delle figure*. Per questo aspetto vi sono qui motivi per noi interessanti. Ma egli non si rende conto – e non è poco – che una «geometria» può avere inizio solo se non ci si arresta alla muta contemplazione delle strutture e se dunque questa logica riesce a trovare la via della proposizione. Le figure non sono solo viste – sia pure in un'intuizione liberata dall'empiria: esse sono appunto *figure ideate*. Ciò significa ad un tempo *prospettate in idea* e *progettate dal pensiero*. Questa ideazione prosegue sul piano della proposizione – anzitutto nella *ricerca di caratterizzazioni verbali* e poi nell'istituire *nessi e rapporti tra le proposizioni*: deduzioni e strutture argomentative sono momenti di questo pensiero ideante e progettante, e non sterili aggiunte ad una capacità conoscitiva e inventiva che sta tutta prima di esse.

Questo è l'errore di Schopenhauer: il ritenere che la figura possa stare al posto della proposizione, come se le figure *parlassero* da sole! Il contentarsi delle figure, come se la logica della

[47] Cfr. A. Schopenhauer, *Il mondo come volontà e rappresentazione,* I, § 15. Nella sua *Elementarmathematik,* cit., p. 257-259 Klein conduce una discussione ricca di interesse sulla dimostrazione «diretta» del teorema di Pitagora che Schopenhauer propone nel paragrafo citato.

figura fosse tutto, e la logica della proposizione un nulla!

Ecco due linee che hanno un *andamento caratteristicamente diverso.*

Ed ora farò questo commento: la prima, a differenza della seconda, può essere considerata come la rappresentazione grafica di una funzione derivabile in ogni suo punto. Si avverte subito l'enorme distanza che separa le figure in quanto sono state semplicemente notate nella differenza del loro aspetto e le stesse figure in rapporto alle quali si parla di «derivazione». Un cammino lungo e intricato conduce dalle prime alle seconde. E quante cose ci sono lungo questo cammino! Non c'è certamente solo la logica delle figure – ma un intero sistema di concetti, di connessioni logico-proposizionali dovrebbe essere richiamato se si dovesse spiegare il senso di quel commento.

L'errore opposto sta nell'idea che abbia diritto all'esistenza soltanto la logica della proposizione. I semplicismi si dànno la mano, sostenendosi l'un l'altro.

Il pensiero può permettersi di spaziare a tutto campo e di avvalersi di molti mezzi. Esso si muove tra regole e tra diversi tipi di regole. Ora poggia sulle figure, ora sui segni. E questi ora li interpreta, ora li lascia provvisoriamente non interpretati. Assume, deduce ed argomenta. Talvolta può per lungo tempo restare prigioniero di una immagine; ma una semplice immagine può anche rappresentare una guida. E può persino, dopo aver posto tra sé e le figure un autentico abisso, ritornare alle evidenze che in esse si mostrano.

ANNOTAZIONE

Per l'intera tematica di una logica delle figure e del suo complesso rapporto con la proposizione, risulta di straordinario interesse l'interpretazione che Lambert diede di Euclide, riprendendone l'esemplarità metodica per la filosofia in modo interamente differente dalla tradizione. Questa interpretazione è ricostruita e discussa nel notevole volume di Paola Basso, *Filosofia e geometria*: *Lambert interprete di Euclide*, La Nuova Italia, Firenze 1999. L'insistenza di Lambert sugli aspetti costruttivi di Euclide, certamente inusuali ai tempi suoi, lo induce a ripensare alla funzione della figura nella dimostrazione ed a porre in questione la stessa concezione del concetto secondo lo schema genere-specie, insistendo piuttosto sui nessi di tipo «genetico». Questa tematica è sviluppata in tutta la sua ampiezza nel volume di Paola Basso, secondo angolature che, oltre a rendere pienamente conto degli aspetti storici, ridestano vivacemente l'interesse teoretico legato ad un dibattito che non si può dire certamente sia ormai esaurito.

§ 6

Iterazione operativa e motivo infinitario – L'ecceterazione come strumento primario per l'ideazione di nuovi oggetti – Il pentagono stellato dei pitagorici – La figura infinita.

Le nostre considerazioni precedenti facevano riferimento alle definizioni ed ai postulati euclidei come puro spunto ed occasione per una discussione teorica a più ampio raggio: il problema che ci interessa, in Euclide, è il fatto che la geometria ci appare qui come un complesso punto di intersezione tra la visione e il pensiero. In parte si coglie in essa la vicenda di un pensiero ancora prossimo alle sue origini, in parte questa vicenda sembra poter avere un significato esemplare che va ampiamente al di là di esse.

In Euclide l'istanza che viene continuamente prospettata si trova nello spirito di un platonismo che assume tra i propri scopi il togliere terreno ai fraintendimenti empirici a cui la geometria è esposta. La riga e il compasso di Euclide sono strumenti ideali così come le figure che essi tracciano. Eppure questi strumenti sembrano talvolta, in una sorta di platonismo a rovescio, ricordare di essere copie impallidite di strumenti reali nelle mani del geometra al lavoro.

Le enunciazioni prospettano non tanto degli oggetti già fatti, ma delle operazioni in cui gli oggetti appaiono come risultati. Talora diciamo che essi semplicemente sono – talaltra si intravvede su di essi l'ombra di una mano fantomatica che li fa essere nel gesto del tracciare. Nel secondo postulato si stabilisce che

una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.

Anche in questo caso possiamo asserire che un processo di idealizzazione è già in corso, ma potremmo anche dire che questo processo è, in certo senso, ancora incompleto. Intanto vi è l'espressione «retta terminata» (πεπερασμένη) ovvero «avente degli estremi» che indica come in Euclide non si parli affatto di retta nel senso in cui se ne parlerà nelle elaborazioni posteriori fino ai nostri giorni. E non possiamo dire nemmeno che la retta terminata corrisponda a ciò che si chiama segmento di retta per il semplice fatto che parlare di segmento di retta presuppone una idea di retta come retta infinita in un'accezione che in Euclide non c'è.

Il *segmento di retta* è *parte* di una retta pensata come *attualmente data* e come *infinita da entrambi i lati*. La «retta avente degli estremi» di Euclide è invece una nozione elementare del tutto autonoma e indipendente: in conformità alla Terza Definizione (*Estremi di una linea sono punti*) e al Primo Postulato (*Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto*) essa indica una linea finita e delimitata. Esattamente come le nostre rette che disegnamo alla lavagna e che sono tutte, invariabilmente, rette «terminate».

Ma il Secondo Postulato aggiunge a questa nozione della retta qualcosa di molto importante. La linea rettilinea può essere prolungata senza restrizioni. In ciò è implicato il rimando all'*operazione del tracciare*. La retta è anzitutto qualcosa che si traccia. In rapporto ad essa si stabilisce una possibilità che è del tutto indipendente dagli ostacoli e dagli impedimenti pratico-concreti. *Prolungare* significa qui *concepire (pensare)* la retta terminata come una linea che è caratterizzata dalla *possibilità essenziale che, dopo l'uno o l'altro dei suoi estremi, essa prosegua nella stessa direzione fino a raggiungere un nuovo estremo.* Quest'ultima precisazione è particolarmente importante, dal nostro punto di vista, benché sembri cogliere una differenza abbastanza sottile. Poiché la linea è qualcosa solo in quanto è racchiusa entro i punti che sono i suoi estremi, allora il prolungare deve essere inteso come un *aggiungere pezzo a pezzo*, piuttosto che un'azione per così dire di *semplice continuazione*. Si comincia con un tratto, e poi se ne aggiunge un altro, e poi un altro ancora...

Se intendiamo le cose in questo modo, approfittando certo del motivo euclideo, ma con un'accentuazione che ha mira piuttosto i prossimi sviluppi della nostra discussione, questa possibilità essenziale del prolungamento della retta viene connessa ad una regola interna della sua costruzione, e di conseguenza all'iterabilità di quella regola.

Appare così subito chiara la connessione tra l'*iterazione operativa* e il *motivo infinitario* che qui si annuncia.

L'infinito di cui si tratta è naturalmente l'*infinito potenziale* – quella retta infinita che noi assumiamo in piena ovvietà fin dall'insegnamento elementare, in Euclide non c'è, dunque non c'è nemmeno l'idea di infinito attuale di cui essa è un buon esempio. C'è invece l'idea del prolungamento, l'idea di una processualità che può proseguire indefinitamente passo dopo passo – dunque di una potenzialità che viene via via attualizzata, ma che ogni volta propone un risultato finito.

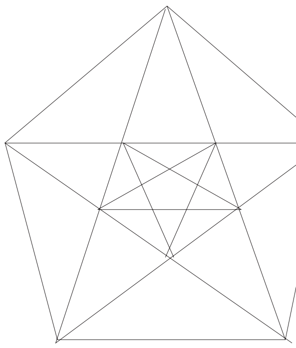
Si potrebbe sostenere che la retta attualmente infinita si situi ad un superiore livello di astrazione, che essa sia caratterizzabile come un «nuovo oggetto», come un puro «oggetto del pensiero» assai più nettamente della retta prolungabile all'infinito. E così in effetti è. In quest'ultimo caso possiamo infatti contare sulla prossimità con l'esperienza. Certe configurazioni si presentano fenomenologicamente con il senso dell'andare-sempre-oltre, e tanto più possono esser investite di questo senso quanto più vengono intese come generate da una regola. Il maestro può fare alla lavagna i primi gesti, alludendo poi ad un *eccetera* che riapre ogni passo al passo successivo. Questa prossimità non toglie tuttavia la formidabile *potenza teorica* di questo *eccetera*. Siamo alla presenza di una straordinaria procedura del pensiero, di *un strumento primario per l'ideazione di nuovi oggetti*. Infinito attuale e infinito potenziale non sono due concetti che stanno l'uno accanto all'altro semplicemente come due diversi modi di concepire l'infinità. L'infinito attuale «presuppone» l'infinito potenziale e viene *costituito* a partire da esso. Assumiamo la retta come esempio: a partire dall'operazione concreta del tracciare, viene prospettata già su un terreno ideale la possibilità di un prolungamento illimitato. Ciò che si mantiene anche su questo terreno è tuttavia ancora il riferimento all'atto soggettivo del produrre, per quanto questo questo riferimento possa essere rarefatto.

Il momento che realizza un'astrazione ulteriore è un passaggio oggettivante: la retta non viene più intesa come prodotta, ma come data, e precisamente nella sua attualità e compiutezza. A questo punto il rapporto può essere ribaltato: il tracciare una retta, la possibilità di incrementarla sempre di nuovo, diventa il modo *soggettivo* di acquisire di passo in passo, secondo un processo inesauribile, *questa infinità attuale e compiuta*: ed il processo è inesauribile non tanto in forza dell'iterabilità di principio della regola, ma in forza della cosa stessa che *è* inesauribile. *La* retta è diventata ora realmente un oggetto in sé, un *ente* di nuovo genere, che sta del tutto a parte rispetto gli oggetti del nostro mondo. L'infinità potenziale sta perciò prima e dopo l'infinità attuale: *prima* essa ha una funzione costitutiva della stessa oggettività attualmente infinita; *dopo* essa può essere fatta regredire ad una pura circostanza di ordine soggettivo, e pertanto irrilevante in quanto riguarda al più le accidentalità della manifestazione empirica dell'oggetto *ideato*.

Riprendendo una frase che abbiamo già impiegato in altro contesto: l'infinito potenziale è essenziale per istituire il senso dell'infinito attuale, mentre diventa inessenziale per confermarlo.

Tuttavia questo ritrarsi sullo sfondo dell'infinito potenziale o più precisamente delle procedure ecceteranti non deve far perdere di vista la *potenza teorica* dell'ecceterazione.

Questa potenza può essere esemplificata in un lampo con il *pentagono stellato dei pitagorici*. Tracciando le diagonali all'interno di un pentagono regolare ottengo una stella che contiene un pentagono regolare. Tracciando le diagonali all'interno di questo pentagono ottengo un'altra stella che contiene un pentagono regolare, *eccetera*. (In seguito vedremo che questa descrizione potrebbe essere considerata non appropriata)



Siamo qui alla presenza di una costruzione geometrica che è realizzata sulla base di una precisa regola. E mentre nel caso della retta l'illusione di un'interpretazione «empirica» del prolungamento può essere più persistente, per il fatto che possiamo immaginare proprio di prolungare la retta andando anche molto lontano, qui invece questa illusione è subito resa inattiva dal fatto che l'iterazione della regola, come procedura concreta, si dovrà fermare quasi subito: ben presto il pentagono più interno diventerà confuso e indistinto. La pratica del disegno ci abbandona. Ma il pensiero dell'iterazione pesa ormai sulla figura, ed è la figura stessa, nel suo carattere di dato visivo, che è diventata inessenziale. Siamo sulla soglia della figura infinita, così come del numero infinito. Varcando questa soglia il pentagono stellato verrà posto come un' oggettività fatta di infiniti pentagoni e infinite stelle, che io vado eventualmente scoprendo di passo in passo penetrando sempre più in esso in un viaggio che non avrà mai fine.

§ 7

Un modo singolare per impartire ordini e disegnare una linea – Introduzione del segno F e di un algoritmo generatore di segni F.

Il pentagono stellato dei pitagorici – questo oggetto che è tanto concreto e sensibile da aver rappresentato un vero e proprio segno di riconoscimento della setta e che è tanto denso immaginativamente da aver suggerito i più singolari riferimenti magico-rituali, come pentagramma mysticum, attraverso l'intero medioevo e che infine è unicamente in rapporto ad un pensiero – rappresenta una figura in cui può essere esemplificata in maniera non banale la caratteristica di autosimilarità che è una delle condizioni definitorie di oggetto frattale. A noi fornisce l'occasione per imprimere una svolta alla nostra discussione.

Questa svolta può tuttavia avvalersi proprio delle nostre ultime considerazioni sul prolungamento infinito della retta euclidea reinterpretata come risultato dell'applicazione iterata di una regola. Ad esse ci ricolleghiamo immaginando che un allievo con il gesso puntato sulla lavagna attenda istruzioni dal maestro: il maestro dice: «Avanza!» – e l'allievo traccia un segmento di lunghezza prefissata. Il maestro dice ancora «Avanza» e l'allievo esegue prolungando il segmento con un incremento della stessa lunghezza. Il maestro dice ancora «Avanza»: l'allievo esegue. Ora, nulla ci impedisce di intendere questa espressione come *nome di un'operazione,* cosicché il maestro potrebbe dire all'allievo: «*ripeti tre volte l'operazione 'Avanza'*».

Conveniamo di simbolizzare l'operazione «Avanza» con la lettera alfabetica F(orward). Disponendo di un'altra lavagna, il maestro potrebbe allora limitarsi a scrivere FFF – e l'allievo, guardando quel segno, sa che cosa deve fare.

In realtà ci sono vari modi di intendere una situazione simile, ed anche di descriverla e di considerarla, tutte altrettanto legittime ed istruttive. Il simbolismo grafico è stato da noi introdotto come una sorta di equivalente dell'istruzione verbale, perciò potrebbe sembrare che tutto resti come prima.

Da un lato vi è una istruzione linguistica, dall'altro la realizzazione della figura in rapporto a ciò che viene impartito in quella istruzione.

Ma l'istruzione linguistica – questo è il primo cambiamento significativo – è comunque un «grafema», una figura anch'essa. Su entrambe le lavagne ci sono ora delle figure. Cosicché potremmo anche non stabilire alcun collegamento tra esse, come accadrebbe per chi entrasse nell'aula senza nulla sapere del gioco che si sta svolgendo. Se stabiliamo la connessione implicando gli agenti – il maestro e l'allievo – si avrà il rapporto «ordine-esecuzione». Ma possiamo anche prescindere da ciò e considerare ad esempio il segno FFF come una sorta di *sostituto simboli-*

co-notazionale della linea. Il segno F rappresenta allora un tratto, e nel segno FFF il «prolungamento» del tratto attraverso la sua ripetizione.

Tutto ciò contiene il suggerimento di sospendere temporaneamente il significato che attribuiamo ai segni, proponendo un algoritmo generatore di sequenze di segni F secondo un modello che in realtà già ben conosciamo.

L'*elemento iniziale* sia il grafema x e la regola sia espressa come una *regola di sostituzione per il grafema x.*

INIZIO	Fx
REGOLA	x → Fx

È necessario prendere chiaramente nota del fatto che abbiamo qui adottato senza riserve un punto di vista «formalistico» e di conseguenza la x non meno della F vale come mero segno grafico. La regola stabilisce che al grafema x è possibile sostituire il grafema Fx. L'unico segno provvisto di senso è in realtà la freccia, dal momento che essa significa appunto: «È possibile sostituire il segno che si trova alla sinistra della freccia con il segno che si trova alla destra».

È facile ora rendersi conto, non appena cerchiamo di far funzionare questo algoritmo, che esso può cominciare e proseguire in un solo modo.

La prima figura del calcolo è stata fissata in Fx. La regola andrà infatti applicata ad essa e si otterrà così FFx. In questo segno vi è un segno x e dunque all'interno di esso potrà essere operata la sostituzione prevista dalla regola, ottenendo così FFFx. Il *meccanismo dell'iterazione è dunque del tutto interno all'algoritmo*, fa parte di esso. Se per caso volessimo ad un certo punto arrestarci, abbiamo semplicemente preso noi una decisione. L'ultima figura raggiunta segnalerà in ogni caso, con la x che essa contiene, la possibilità di principio di una continuazione. Si noti a questo proposito che, ritornando da questo piano puramente formale, all'interpretazione dei segni-simboli, il segno x *resta comunque privo di un riferimento semantico vero e proprio*. Esso non ha una interpretazione *esterna* al linguaggio per il semplice fatto che non gliene abbiamo data alcuna. Tuttavia ha una precisa e importante funzione *intralinguistica* (sintattica) dal momento che, da un lato, rende possibile il primo passo del calcolo e, dall'altro, rappresenta, all'interno di ogni figura, la condizione per l'ecceterazione della regola.

Come abbiamo già notato ci stiamo muovendo su un terreno che ci è ben noto e che abbiamo cominciato a sperimentare nell'ambito delle considerazioni sul numero. L'algoritmo generatore dei segni F è, dal punto di vista formale, esattamente lo stesso dell'algoritmo che genera i segni della notazione-tratto.

§ 8

Introduzione nel simbolismo dei segni che indicano il mutamento di direzione – Esempi di calcoli.

Vogliamo ora indugiare presso il nostro semplice algoritmo ritornando all'interpretazione con la quale lo abbiamo introdotto. Tenendo conto di essa potremmo dire che esso fornisce la presentazione simbolica di una retta in quanto ne presenta la regola generatrice. Naturalmente la parola «retta» andrà intesa in un senso strettamente connesso al modo in cui essa viene introdotta e quindi tenendo conto della costruzione «a tratti» che abbiamo prima descritta in parole e poi presentata in un calcolo. Questo calcolo è la sua definizione operazionale.

Si tratta di vedere se di un simile risultato, che in se stesso potrebbe sembrare alquanto peregrino, possiamo realmente farcene qualcosa. Abbiamo forse fatto qualche guadagno significativo nel porre le cose in questo modo? È realmente interessante assumere un punto di vista che già in rapporto ad una figura così elementare richiami l'attenzione sulla possibile presenza del tema della ripetizione? Che importanza e che peso dobbiamo dare al passaggio ad una scrittura simbolica come quella che è stata or ora proposta? Intanto, per cominciare a dare una risposta a partire da quest'ultima domanda, questo simbolismo *ci aiuta a pensare*, attraverso di esso la nostra riflessione successiva può trovare un nuovo orientamento ed una nuova direzione. Abbiamo solo bisogno di comprendere in che modo esso possa essere reso un poco più complesso – esso è realmente troppo elementare – e in che modo potremmo impiegarlo eventualmente introducendo di volta in volta tutte le modificazioni che riterremo utili ai nostri scopi.

Per compiere un primo passo: la successione dei tratti, nel caso precedente, si sviluppa in un'una unica direzione. Si potrebbe allora proporre come primo arricchimento, oltre il segno F, un segno che indichi il cambiamento di direzione verso destra ed un segno che indichi il cambiamento di direzione verso sinistra secondo un angolo la cui grandezza potrà essere di volta in volta prefissata.

Per indicare il mutamento di direzione verso sinistra scegliamo il segno « + », per indicare il mutamento di direzione verso destra scegliamo il segno « – » , segni che non avranno dunque in questo contesto alcun significato aritmetico, e che ovviamente potrebbero essere sostituiti da qualunque altro. Il nostro linguaggio si arricchisce di *due segni* e di *una condizione*. I segni sono il «+» e il «-». La condizione è la grandezza dell'angolo.

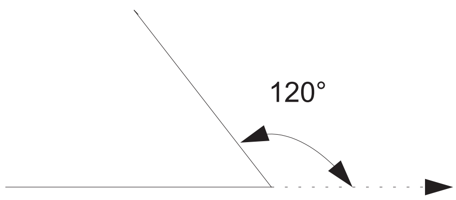
Il percorso diventa così più mosso, potremo ottenere una grande varietà di linee, ed in particolare queste linee potranno essere chiuse ed anzi dar luogo ad alcune figure geometriche che ci sono familiari.

Supponiamo ad esempio di fissare la condizione di un angolo di 120° e di scrivere la sequenza di segni:

F+F+F

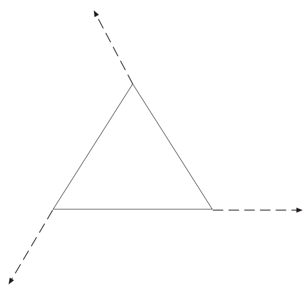
Occorre intanto attirare l'attenzione sul fatto che, essendo il mutamento di direzione inteso come deviazione da una direzione rettilinea da intendere come procedente da sinistra a destra, la grandezza dell'angolo deve essere misurata a partire da essa.

F+F



Precisato questo punto è chiaro che la sequenza F+F+F può essere considerata un sostituto simbolico-notazionale di un triangolo equilatero.

F+F+F



Quella sequenza può essere considerata come ottenibile a sua volta all'interno del seguente calcolo:

CONDIZIONE: ANGOLO 120°

INIZIO: x
REGOLA : x→ F+x

che dà luogo alla sequenza: F+x, F+F+x, F+F+F+x, ecc. La figura triangolare è ottenuta alla terza iterazione: al terzo passo la linea si chiude e verrà ripetuto esattamente lo stesso percorso. Andare oltre non ha dunque alcun interesse. Al terzo passo la stringa ottenuta è

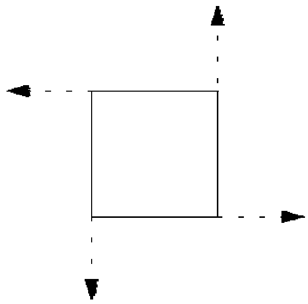
F+F+F+x

che differisce dalla precedente F+F+F solo per il segno «+x», che è irrilevante rispetto alla sua interpretazione figurale; tuttavia questa differenza segnala sul piano della formula la novità nel concetto di figura a cui abbiamo già accennato[48].

Non vi è certo bisogno di spiegare che con un angolo di 90° si otterrà un quadrato, esattamente dunque con la stessa re-

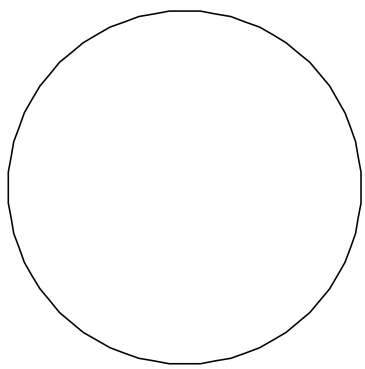
[48] Ovviamente potremmo concepire la linea retta come una costruzione conforme a questo algoritmo assumendo 0° come deviazione angolare.

gola del triangolo, e con la sola differenza che le iterazioni dovranno essere quattro per ottenere la chiusura della figura.

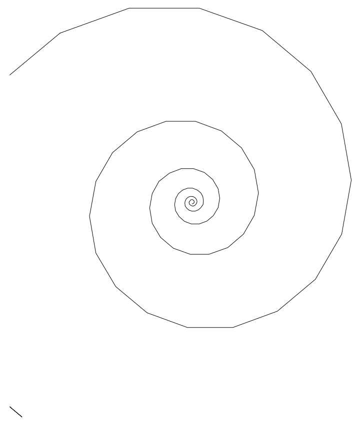


Ed esattamente con la stessa regola, si potranno in generale formare figure regolari con tutti gli angoli che siano divisori di 360. Il numero dei lati sarà dato dal rapporto tra 360 e la grandezza dell'angolo, e sarà pari al numero delle iterazioni.

Naturalmente con suddivisioni approssimate potremo costruire poligoni con lati sempre più brevi e infine, *in rapporto alla realizzazione grafica concreta,* indistinguibili dal cerchio. Nel caso seguente, lo stesso algoritmo genera, con un angolo pari a 10° alla 36a iterazione qualcosa di molto simile, dal punto di vista grafico, ad un cerchio:



E non siamo forse subito stimolati ad interrogarci che cosa accadrebbe se assumessimo che il tratto di base, in luogo di rimanere costante, crescesse per incrementi a loro volta progressivamente crescenti?



Per ottenere questa sequenza spiraliforme di tratti è ovviamente necessario introdurre una modificazione delle condizioni e delle regole costruttive: in particolare bisogna stabilire l'incremento e fare in modo che questo incremento sia cumulativo e che quindi porti ad un progressivo allungamento del tratto.

Cominciamo ora a sospettare che possa verificarsi, attraverso variazioni introdotte nell'algoritmo, un'autentica esplosione di forme. Ma prima che ciò accada conviene indugiare in qualche parola di commento. Anzitutto già a questo punto del nostro tragitto ci sembra di poter dire che, a partire da una modificazione sul modo di concepire la linea, abbiamo mostrato la possibilità di «riunire sotto un unico concetto» una molteplicità assai varia di figure – confermando un pensiero che è già in precedenza affiorato, e cioè che la «subordinazione concettuale» non è affatto sempre e necessariamente da concepire come una unificazione tra *cose* che hanno *proprietà* comuni. Qui in effetti l'unità «concettuale» è costituita dal riferimento all'algoritmo, dalle regole e dalle condizioni che rappresentano nel loro insieme lo schema operazionale della costruzione – potremmo addirittura dire: *il concetto è dato proprio da questo schema operazionale.* E tanto più sembra opportuno mettere l'accento sulla terminologia del concetto, per il fatto che è proprio la *concezione* della figura che cambia, nella stessa misura in cui cambia il *punto di vista* da cui essa viene considerata, e variano dunque le nozioni a partire dalle quali essa viene *pensata*.

Occorre qui attirare l'attenzione sul fatto che quel *prospettivismo di cui tanto si parla nella fenomenologia della percezione in realtà può essere ampiamente esteso anche all'ambito delle formazioni intellettuali*. Non vi è affatto *il* concetto del cerchio o il concetto della spirale, con la loro definizione logicamente in ordine che si pretende valga come definizione assoluta, ma modi prospetticamente diversi di intendere queste forme (di pensarle) che si rispecchiano nella molteplicità delle loro possibili «definizioni». L'elemento prospettico, che nella percezione è dato dalla differenza del luogo di osservazione, è qui fornito invece dalla differenza delle *nozioni di riferimento*. Forse si può sostenere che proprio l'ambito del pensiero matematico, che talora viene presentato come modello di univocità, si presenta invece come un campo interamente dominato da una pronunciata plurivocità prospettica. Non vi è forse in questo campo alcun concetto che se ne stia, per così dire, fermo in un preciso luogo, ma ognuno può essere colto secondo angolature diverse, secondo inclinazioni differenti.

ANNOTAZIONE

Il linguaggio informatico a cui qui e nel seguito faccio ampio ed esplicito riferimento, è un linguaggio che appartiene alla tipologia degli L-systems ovvero «string rewriting systems». La prima idea di un sistema di produzione grafica attraverso la "riscrittura" di stringhe è dovuta ad Aristid Lindenmayer (1968). Si parla perciò anche di linguaggi di Lindenmayer e la lettera L richiama naturalmente questo nome. Essa è stata poi ripresa da A. R. Smith nel 1984 e da P. Prunsinkiewic nel 1986 (*Graphical Applications of L-systems*, Vision Interface, 1986, pp. 247-253) e dallo stesso Lindenmayer e Prunsinkiewic con diverse pubblicazioni e in particolare con il volume di P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, New York, 1990. Un breve schizzo sulla struttura degli L-systems è stato realizzato da Dietmar Saupe nella Appendice C (A unified approach to fractal curves and plants) nel volume da lui curato insieme a H. Peitgen, *The Science of Fractal Images*, Springer Verlag, New York 1988. Tale linguaggio è a sua volta ispirato al linguaggio di programmazione Logo che fa parte della famiglia dei linguaggi Lisp. Quanto lontano si possa andare cominciando da un inizio tanto semplice è mostrato dal volume di H. Abelson e di A. Disessa, *Turtle Geometry*, MIT, 1980, trad. it. *La geometria della tartaruga*, Muzzio Editore, Padova, 1986. Tuttavia vi sono ragioni che andrebbero esaminate a fondo per le quali, nonostante la notorietà del problema, e l'ampiezza di direzioni il cui questa tematica può essere sviluppata e che è dimostrata da una bibliografia ormai molto ricca, essa non si è incontrata in modo significativo, che io sappia, con la riflessione epistemologica. In particolare non conosco nessuno scritto che si avvalga del riferimento agli L-systems in un contesto filosofico come quello qui proposto. Naturalmente ciò non significa che fin dall'inizio L-systems non fosse motivato da interessi scientifici e teorici molto forti: essi erano tuttavia orientati soprattutto in direzione delle tematiche della rappresentazione dei processi di crescita biologica e dei sistemi dinamici. Un parte non irrilevante dell'interesse è stata volta – come nel caso dei frattali in genere – all'ambito della computer graphics. Mi sembra necessario richiamare l'attenzione anche sulla rilevanza di questo genere di studi dal punto di vista epistemologico, ponendo in realtà questa rivendicazione in un quadro più generale: la riflessione epistemologica in genere non si è incontrata in modo realmente approfondito con le tecniche informatiche, da cui essa potrebbe attingere probabilmente molte idee, e inversamente da parte informatica forse non si è consapevoli delle implicazioni di ordine filosofico che si trovano all'interno di quelle tecniche, che non sono affatto puri marchingegni al servizio del calcolatore.

Per ciò che riguarda un possibile linguaggio L-system utile ai nostri scopi immediati, non è difficile realizzarne un'implementazione all'interno di un qualunque linguaggio di programmazione.

Si tratta fondamentalmente di realizzare un programma che consta di tre parti: dobbiamo infatti poter disporre di

[1] una procedura P_1 che, attraverso l'applicazione ricorsiva delle regole e delle condizioni ad una stringa iniziale, pervenga ad una stringa finale S_1;

[2] una procedura P_2 che interpreti ciascuna lettera di cui è composta S_1 e la converta in modo opportuno formando una matrice o una lista S_2 contenente le coordinate di scher-

mo corrispondenti al percorso «cifrato» in S_1;

[3] una procedura P_3 che esegua su video il tracciamento delle linee in conformità a S_2.

Il linguaggio di cui fa uso *Mathematica* della Wolfram Research, che tratta splendidamente le stringhe e le liste, mi ha consentito la realizzazione di un linguaggio di questo tipo estremamente duttile, facilitando anche il dimensionamento a schermo con gli automatismi di rappresentazione grafica che sono propri di questo linguaggio. La maggior parte dei disegni di questo libro sono stati compiuti attraverso di esso. All'interno di un corso universitario sul tema della ripetizione tenuto presso l'Università di Milano nel 1994 – corso che sta all'origine di questo lavoro – ho realizzato esempi attraverso un'implementazione in Visual Basic. Programmi che realizzano istruzioni L-systems sono in ogni caso abbastanza numerosi e facilmente reperibili.

§ 9

Variazioni sul tema del pentagramma pitagorico e scoperta dell'algoritmo che lo genera.

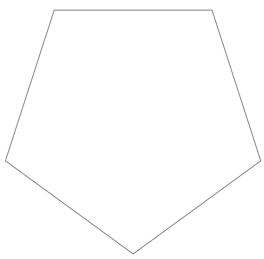
Come si sarà ben compreso, non siamo affatto disposti a considerare il linguaggio or ora introdotto come un puro artificio informatico, privo di elementi che invitino alla riflessione teorica. Esso è certamente uno strumento assai utile, è un traccialinee – anzi, come subito vedremo – uno stupefacente traccialinee, nello stesso senso in cui lo sono la riga e il compasso euclideo, i quali sono strumenti materialmente determinati, con caratteristiche dovute alla loro consistenza materiale, pronti tuttavia a dissolversi come contraccolpo rispetto ai significati ideali da cui vengono investiti gli oggetti da essi prodotti.

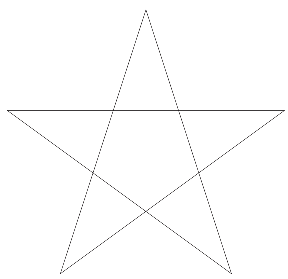
Precisato questo punto possiamo dar libero corso alle nostre passioni di fenomenologi interessati alle strutture lasciando che il nostro traccialinee manifesti pienamente quella capacità di produrre immagini che abbiamo finora appena intravista.

Intanto vogliamo svolgere una sorta di esercitazione ricollegandoci al pentagramma dei pitagorici. Per impratichirci del nostro strumento quale esercizio potrebbe essere migliore del tentativo di stabilire la *formula* di questa figura, lo *schema operativo che rappresenta la sua essenza*!

Oltretutto nessuno, che io sappia, lo ha mai fatto, e questo può servirci da stimolo – così come la stessa idea di possedere la cifra informatica di una figura tanto antica e veneranda.

Questa ricerca può essere affrontata, come tutte le cose di questo mondo, in modo prudente e riflessivo, avviandoci con calma verso una determinata direzione con le certezze di un ragionamento convincente fatto in precedenza; oppure in modo imprudente e irriflessivo, sperimentando un poco alla cieca, azzardando questo «assioma» o quella regola, cercando di rendersi conto, alquanto all'ingrosso, di che cosa accada. Naturalmente la via migliore è la prima. Ma come resistere alla tentazione di qualche prima prova, guidati alla meglio dal fatto che in ogni caso in questa figura c'è un pentagono, e vi sono i diametri che formano una stella ed eventualmente i triangoli formati dall'intreccio delle figure? Uno dei molti nomi con i quali i Pitagorici chiamavano questa figura era quello di τριπλόον τρίγωνον, cioè di triplo triangolo. In effetti possiamo anche vedere in essa la sovrapposizione di tre triangoli eguali. L'idea dunque – molto sommaria, molto azzardata e non particolarmente riflessiva, è quella di provare a far giocare insieme, nello schema operazionale, intanto pentagono e stella. Sappiamo già che il pentagono è rappresentato simbolicamente da «F-F-F-F-F» con l'angolo a 72°. La stella ci riserva subito una piccola sorpresa dal momento che essa risulterà «F--F--F--F--F» : ciò significa che la differenza rispetto al pentagono sta unicamente nella grandezza della deviazione dalla direzione rettilinea, che è doppia rispetto al pentagono. La formula è dunque essere *esattamente la stessa* di quella del pentagono, con la sola differenza dell'angolo portato a 144°.





Siamo subito avvertiti dal simbolismo, e precisamente dal simbolismo *non ancora interpretato*, di essere alla presenza di costruzioni strettamente solidali.

Ed ecco alcuni risultati. Naturalmente ci basta enunciare lo schema operazionale: il programma di calcolo realizzerà la figura corrispondente alla stringa ottenuta dopo un certo numero di iterazioni.

Di qui in avanti per pure ragioni di chiarezza daremo una numerazione progressiva agli schemi operazionali ed alle figure ottenute, indicando tra parentesi quadre il numero di iterazioni corrispondenti.

Con prima iterazione si intenderà la prima applicazione delle regole all'assioma, con seconda iterazione l'ulteriore applicazione delle regole al risultato precedentemente ottenuto, e così via. Nel caso che ciò sia opportuno verrà indicato all'inizio anche la condizione angolare, che ora viene omessa essendo sempre pari a 72°.

Schema operazionale n. 1

ASSIOMA	REGOLE
F--F--F--F--F	F → F-F-FA
	A→ F-F-F-F-F

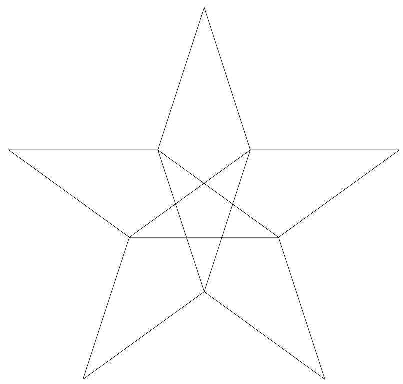


fig. 1, I

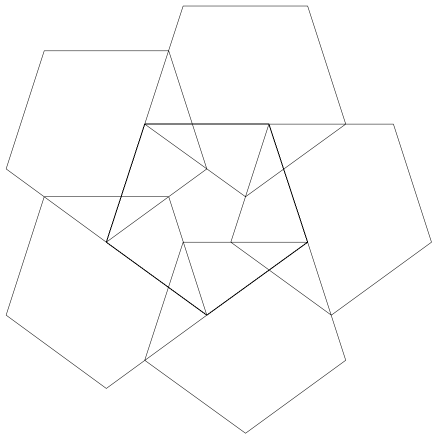


fig. 2, II

Schema operazionale n. 2

ASSIOMA	REGOLE
F--F--F--F--F	F → F-F-FA
	A→ F--F--F--F--F

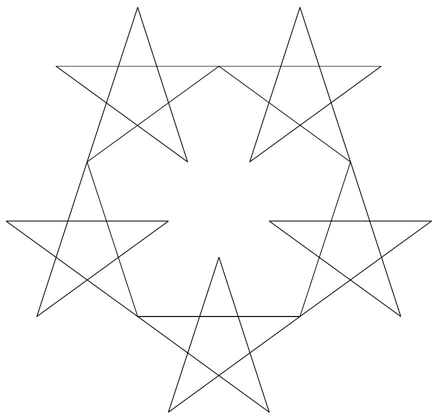


fig. 3, III

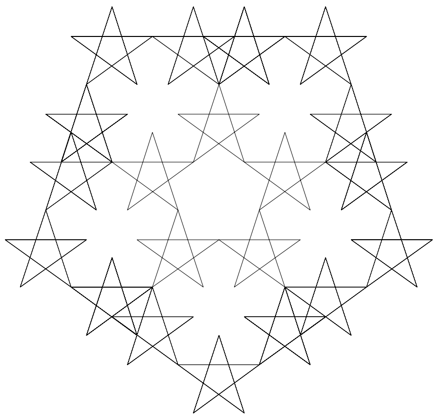


fig. 4, III

Schema operazionale n. 3

ASSIOMA	REGOLE
F--F--F--F--F	F $\rightarrow$ F+F+FA
	A $\rightarrow$ F--F--F--F--F

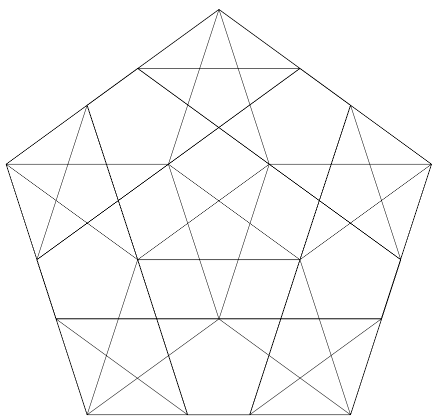


fig. 5, II

Il traccialinee ha cominciato a funzionare – l'algoritmo elabora le sostituzioni ed ai primi passi mostra ovunque come l'una figura si costruisca sull'altra, dentro l'altra, insieme all'altra. Stelle e pentagoni si alternano qui in maniera sorprendente sotto i nostri occhi. La stella scompare nella fig. 2 dove vi sono cinque pentagoni eguali e cinque triangoli eguali, che nella loro sovrapposizione danno luogo ad un pentagono centrale più piccolo.

Una piccola modificazione all'interno del simbolismo mostra nella fig. 3 come cinque stelle, ognuna delle quali contiene nel suo interno un pentagono, possano formare un pentagono con un lato eguale a quello della stella formando un nuovo pentagono, i cui lati sono suddivisi dai vertici del pentagono inscritto esattamente in due parti eguali, ciascuna delle quali rappresenta a sua volta la sezione aurea del lato della stella.

Con una ulteriore iterazione l'algoritmo produce la fig. 4, in cui tutti i pentagoni appaiono costruiti attraverso figure stellate – almeno considerandoli nel modo in cui si presentano alla vista. Occorre infatti richiamare l'attenzione sul fatto che, ovviamente, non solo non possiamo di norma «intuire» dallo schema operazionale che cosa accadrà nell'interpretazione figurale, ma anche che la visione della figura non è affatto in grado di informarci sul modo in cui è stata costruita, dal momento che in essa non vi è alcuna «memoria» del percorso che è stato seguito, e sono tra l'altro possibili anche sovrapposizioni di tragitti. Le nostre stesse descrizioni guardano alla forma visibile della figura, e non al processo costruttivo come tale.

Una piccola modificazione della regola per F (il «+» che sostituisce il «-») produce, alla seconda iterazione, la fig. 5, dove all'interno di un pentagono vengono tracciate cinque stelle che formano con i loro lati cinque pentagoni; inoltre i lati delle cinque stelle formano un pentagono centrale che contiene una stella.

Nello stesso tempo si noti che la sequenza del pentagono «F-F-F-F-F» compare solo nel primo schema opeprazionale, mentre negli altri abbiamo a che fare soltanto con la sequenza della stella e la sequenza di tre F. Ciò che prima dicevamo in rapporto alla figura – che vi è un modo di considerarla per cui essa invita alla trasformazione – sembra ora si possa dire in rapporto al simbolismo concepito come produttivo di figure. Un calcolo ne suggerisce un altro, e si tende a procedere di variante in variante muovendosi all'interno di una famiglia di calcoli nella quale l'uno è *quasi* una ripetizione dell'altro. Vogliamo procedere con gli esempi.

Schema operazionale n. 4

ASSIOMA	REGOLA
-F--F--F--F--F-	F $\rightarrow$ F+F+F

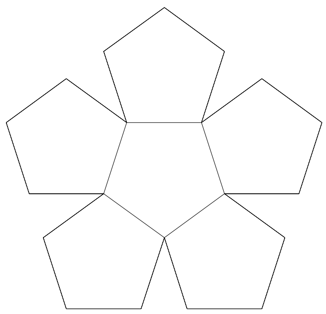


fig. 6, II

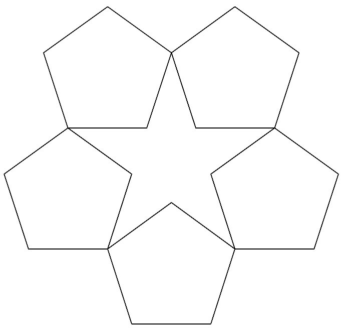


fig. 7, III

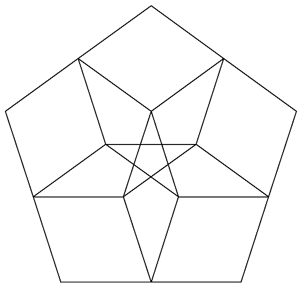


fig. 8, IV

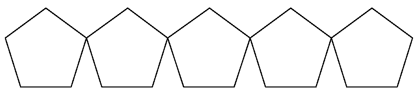


fig. 9, V

Ciò che rende singolare questa sequenza è il fatto stesso che le figure siano successivamente generate dallo stesso algoritmo e che in essa si proponga, sarei tentato di dire, con ostentazione, la relazione di struttura tra il pentagono e la stella. Il pentagono della fig. 6 appare «riempito» alla seconda iterazione dello schema seguente:

Schema operazionale n. 5

ASSIOMA	REGOLE
F--F--F--F--F	F $\rightarrow$AF-F-FA
	A $\rightarrow$ F--F--F--F--F

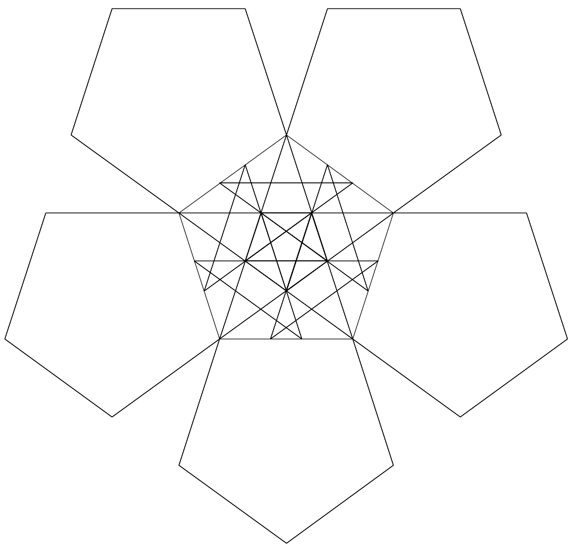


fig. 10, II

Dallo stesso algoritmo si sviluppa in terza iterazione la seguente figura che ha un pentagono stellato anche nel suo punto centrale più interno:

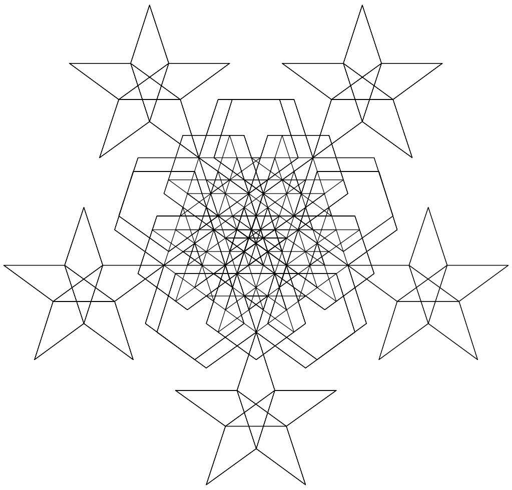
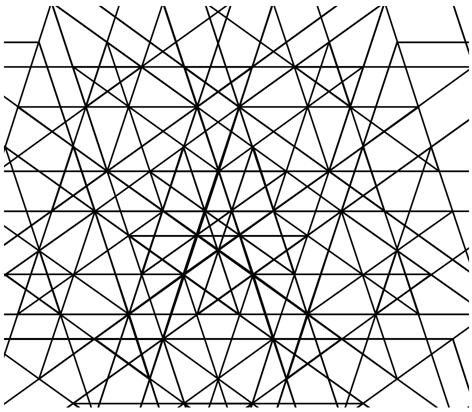


fig. 11, III

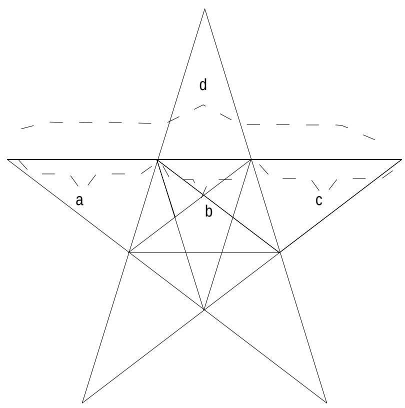
La stella al centro la si può vedere naturalmente soltanto ingrandendo il dettaglio:



Inseguendo queste variazioni sul tema ci siamo tuttavia allontanati dal problema da cui avevamo preso le mosse al punto da averlo quasi perduto di vista. Fin qui ci ci siamo aggirati tra stelle e pentagoni continuamente rinascenti che ricompaiono in contesti sempre diversi. Ma la nostra ambizione era quello di trovare una formula per la generazione del pentagramma pitagorico, il suo schema costruttivo. Ciò significa che non ci basta vedere affiorare qui e là, all'interno delle configurazioni più varie, la tipica configurazione della stella dentro il pentagono o del pentagono dentro la stella. Il nostro scopo iniziale era invece quello di ottenere un algoritmo in cui quella configurazione si genera l'una dentro l'altra ad ogni iterazione successiva.

In realtà non possiamo sperare di venire a capo di esso se evitiamo una riflessione preliminare che suggerisca la direzione in cui cercare questa formula. Anzitutto il lato della stella che è diagonale del pentagono circoscritto va progressivamente riducendosi e di conseguenza dobbiamo preordinare nell'algoritmo una simile riduzione. Uno dei vantaggi dei linguaggi L-systems in genere è quello di poter aggiungere regole e istruzioni senza nessuna restrizione. Si tratta semplicemente di introdurre un altro segno e una regola per la sua interpretazione quando verrà incontrato nella lista finale. Ad esempio siamo liberi di introdurre un segno R che venga interpretato come un'istruzione di riduzione della lunghezza del tratto F.

Per ciò che riguarda la grandezza della riduzione dobbiamo analizzare meglio la figura. Essa chiama in causa una relazione che possiamo supporre fosse nota ai pitagorici almeno dal punto di vista «figurale» e che comunque fa parte degli albori della scoperta dei numeri irrazionali : ogni lato *d* della stella viene suddiviso nei punti di intersezione con gli altri lati secondo il rapporto di sezione aurea; e precisamente in modo tale che ogni lato *d* della stella risulta suddiviso in tre parti *a, b, c* tali che *a+b=c+b = sezione aurea (media ragione)* di *d*, essendo *b* il lato del pentagono interno. *Il lato della stella deve ridursi esattamente della sua sezione aurea, cioè deve diventare eguale alla sua «estrema ragione»* (*c*) essendo il lato della stella interna eguale all'«estrema ragione» del lato della stella esterna. Ponendo a 1 la lunghezza del lato della stella, la sezione aurea calcolata nei suoi primi cinque decimali sarà pari a 0.61803, e il valore ricercato sarà 1 - 0.61803 = 0.38197. Quest'ultimo valore farà dunque parte della regola per R come una costante per la quale va moltiplicata la lunghezza di F. L'algoritmo prevederà dunque, che incontrando il segno R, venga eseguita questa operazione aritmetica che serve al ricalcolo del valore della lunghezza di F: il segno R ha perciò, all'interno del simbolismo, una funzione del tutto diversa dal segno F ed anche dai segni di mera sostituzione intralinguistica.



Oltre al segno R abbiamo bisogno di un altro segno, sia«!» e di una regola per esso. In base a tale regola esso verrà interpretato come un segno a partire dal quale il significato del segni «+» e «-» dovrà essere scambiato. A differenza del precedente, quest'ultimo segno appartiene allo standard dei linguaggi L-systems.

Fatte queste considerazioni possiamo proporre il seguente schema operazionale che rappresenta lo schema secondo il quale può essere ricorsivamente costruito il pentagramma pitagorico. In esso non vengono ulteriormente specificate le funzioni di «R» e di«!»[49].

Schema operazionale n. 6

ASSIOMA	REGOLA
x	x →F--F--F--F--F--RF-!x

[49] È appena ovvio notare che non abbiamo qui preoccupazioni di «buona forma», che richiederebbe una digresssione sugli L-systems non necessaria per i nostri scopi, ma piuttosto di chiara comprensione da parte del lettore. In ogni caso nel programma informatico compariranno, come parametri, l'assioma e la regola così formulata, e non le regole per «!» o per «R» che verranno scritte invece nel motore del programma stesso. Per questa ragione vengono trascurate nel nostro schema operazionale n. 6.

La punta del nostro ipotetico traccialinee comincia a disegnare la figura da sinistra a destra cominciando dal punto I_1; dopo la prima applicazione della regola essa si troverà esattamente nel punto I_2, come ciascuno potrà del resto verificare con carta e matita. Alla seconda e terza iterazione si otterranno le stelle annidate l'una dentro l'altra, nel pentagono interno. In via di principio la procedura è iterabile essendo l'iterabilità assicurata dal carattere ricorsivo della regola per «x».

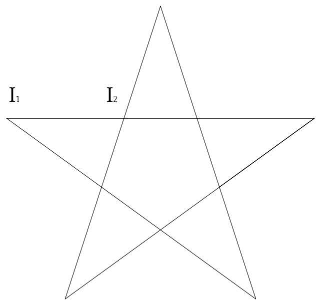


fig. 12, I

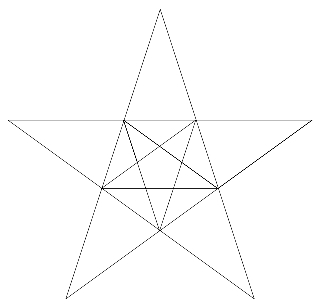


fig. 13, II

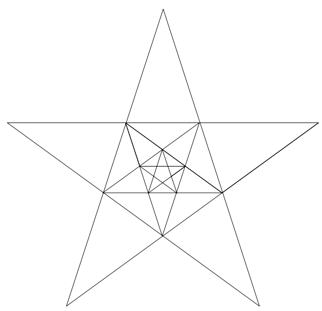


fig. 14, III, eccetera

La forma pentagonale non compare nella formula ed è sempre un risultato del tracciamento della stella, come del resto accadeva per lo più nei nostri esempi precedenti. Questo è un piccolo dettaglio, ma che assume per noi un particolare significato proprio in rapporto al problema della forma-figura. Abbiamo rammentato all'inizio l'idea della forma come contorno, riferendola all'idea della cosa. In rapporto a questa idea della forma è certo più naturale dare maggiore importanza al pentagono, considerando la stella piuttosto come una formazione interna che sorge come risultato del tracciamento delle diagonali del pentagono. Volendo poi parlare delle forme che ne risultano, si presterà attenzione ad una partizione in triangoli e pentagono oppure ai tre triangoli sovrapposti. La descrizione che potremmo dare della stella potrebbe dunque essere quella di un intero fatto di determinate parti che hanno il carattere di parti-figure, ad esempio potremmo dire che si tratta di un pentagono sui lati del quale sono costruiti cinque triangoli. All'inizio anche noi abbiamo dato una descrizione della figura in questi termini. D'altra parte il concetto eminente di poligono non è certo dato, nella *geometria elementare*, dai *poligoni intrecciati* a cui la stella appartiene. Ma il modo di intendere la figura è cambiato: essa sorge da un percorso, essa è propriamente un *tracciato* e la sua unità è data dall'*unità del tracciato*.

Adottando questo punto di vista *il pentagono e non la stella ha carattere di risultato e la stella non è ottenuta dalla suddivisione di un pentagono*. Così doveva essere anche per i Pitagorici: è molto probabile infatti che, *proprio come si fa nell'algoritmo generatore*, il gesto da cui sorgeva la figura fosse appunto quello di realizzare un tracciato che si ricongiungeva al punto di partenza in un percorso *ininterrotto* nel quale veniva disegnata *anzitutto* la stella, quindi veniva raggiunto il vertice del pentagono interno sovrapponendosi ad un breve tratto già tracciato, e da quel vertice, sempre senza interruzioni, poteva iniziare la realizzazione di una nuova stella.

Questo gesto è poi quello che ci dà la chiave per trovare l'algoritmo generatore – che proprio per questo non rappresenta davvero, da parte nostra, una grossa scoperta! L'algoritmo non fa altro che ripercorrere l'itinerario di quel gesto: cominciando dal vertice a sinistra viene tracciata la stella e poi, dopo aver riguadagnato questo vertice, il tratto viene ridotto nella misura voluta in modo da ripercorrere il tratto già tracciato fino al vertice del pentagono interno, e qui si apre il nuovo ciclo, esattamente identico al precedente.

ANNOTAZIONE

Proprio per il fatto che spesso gli storici della matematica passano sotto silenzio questo punto o non dànno ad esso il rilievo che merita, è opportuno richiamare l'attenzione sui molti indizi che rivelano un interesse dominante per le procedure ricorsive da parte pitagorica - e già nel pitagorismo antico. Una corrente filosofica che assume a proprio emblema un simile pentagramma era certamente consapevole delle meraviglie contenute nella sua struttura, e dunque della «logica» interna alla figura. Questo aspetto è in ogni caso illustrato soprattutto dalla teoria dei «numeri figurati». In rapporto ad essi viene ancora in mente la domanda di Wittgenstein se l'aritmetica non possa essere intesa come una sorta di geometria. E la problematica di cui essi sono portatori si presenta molto seducente per chi sia interessato, come noi siamo, al numero ed alla figura sotto il profilo del problema della ripetizione. Nei numeri figurati non si deve tuttavia cogliere una rozza geometrizzazione che «mal si accorda - come osserva Michel - alle nostre abitudini attuali» e che saremmo facilmente portati a ritenere «aberrante», bensì ci si deve rendere conto che, secondo la prospettiva pitagorica, «a ciascun numero corrisponde una figura visibile che non è un segno convenzionale come sarebbe una cifra, ma un riflesso della sua essenza. La figura traduce le proprietà del numero. Inversamente le proprietà dei numeri possono essere colte attraverso quelle delle figure; ma dobbiamo ricordarci che è dal numero che prendiamo le mosse» (P. H. Michel, *De Pythagore a Euclide*, Paris 1950, p. 296). Nella nostra terminologia e in conformità alla nostra trattazione, noi diremmo piuttosto che il numero figurato può essere considerato come un *metodo di notazione aritmetica* a struttura ricorsiva, impiegato per generare seriazioni, e quindi per operare «concettualizzazioni» sulla base di schemi operazionali e per evidenziare in questo modo varie forme di rapporti tra tipi di numeri.

§ 10

Variazioni sul tema della curva di Koch – Problemi attinenti al rapporto tra figura generata e algoritmo generatore.

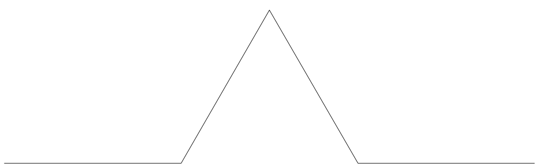
I problemi e i temi emersi nella discussione precedente possono essere ripresi ed approfonditi con riferimento ad un'altra curva che fa parte del repertorio ben conosciuto delle immagini frattali. Si tratta della curva che prende nome dal matematico E. Koch che la propose nel 1904. L'algoritmo costruttivo, estremamemente semplice, è il seguente:

Schema operazionale n. 7

ASSIOMA	REGOLA	CONDIZIONE
F	F→F+F--F+F	Angolo = 60°

Figuralmente l'assioma è dunque rappresentato dal tratto unitario di base.

La parte a destra della freccia della regola dalla figura seguente:



Ciò significa che ogni tratto F delle figure via via generate sarà sostituito da quest'ultima configurazione.

Lo svilupppo dell'algoritmo potrebbe essere presentato come uno schema albero nel modo seguente:

F

F + F - - F + F

F + F - - F + F F + F - - F + F F + F - - F + F F + F - - F + F

ecc.

Si noti che potremmo assumere come assioma la regola stessa, senza modificazioni significative se non ovviamente il fatto che la nostra figura iniziale sarà rappresentata dalla configurazione precedente piuttosto che dalla linea. Con ciò si mostrerebbe già in azione nel simbolismo il tema dell'autosimilarità. Infatti ciò che colpisce nel simbolismo seguente

Schema operazionale n. 8

ASSIOMA	REGOLA	CONDIZIONE
F+F--F+F	F→F+F--F+F	Angolo = 60°

è anzitutto il fatto che ogni F dell'assioma venga sostituito con una configurazione di F che è eguale all'assioma stesso. Abbiamo dunque qui un caso piuttosto differente rispetto a quello del pentagramma pitagorico. Di ogni tratto corrispondente ad F sembra perfettamente pertinente affermare che si tratta di una parte dell'intero figurale corrispondente a «F+F--F+F». Questa parte tuttavia è a sua volta costituita di parti ognuna delle quali ha esattamente la stessa configurazione dell'intero. Potremmo anche dire che ogni parte è eguale, a meno della variazione di scala, alla parte immediatamente sovraordinata che rappresenta il suo intero relativo. La nozione di autosimilarità è qui esemplificata secondo un'accezione ad un tempo molto precisa e molto forte.

Applicando iteratamente le regole dello schema operazionale n. 7 otteniamo la notissima sequenza delle figure:

fig. 15, 0

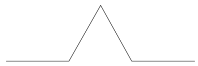


fig. 16, I

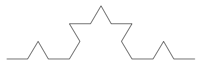


fig. 17, II

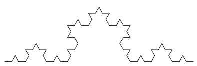


fig. 18, III

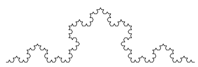


fig. 19, IV

È difficile reagire alla tentazione di fare, anche in questo caso, almeno qualche passo nel seguire le metamorfosi delle forme attraverso le variazioni possibili dell'algoritmo, senza molto riflettere sullo scopo. D'altra parte si tratta di un gioco che, oltre ad esibire le capacità della ripetizione, potrebbe forse suggerire l'idea di un'indagine sistematica che metta a capo ad una tipologia di questi calcoli, attenta anche agli aspetti fenomenologico-figurali ed alla relazione tra questi aspetti e la loro struttura. Potrebbe essere interessante prendere in esame la possibilità di individuare tipi di calcoli con caratteristiche diverse, nei loro nessi con le forme figurali, e dunque i tipi di metamorfosi indotte da determinate variazioni all'interno del simbolismo.

Ecco che cosa può risultare con formule simili a quelle della curva di Koch o almeno non particolarmente più complesse di essa.

Schema operazionale n. 9

Assioma	Regola	Condizione
F	F$\rightarrow$-F+F--F+F-	angolo = 60°

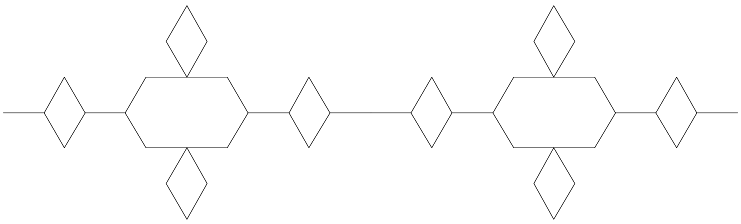


fig. 20, III

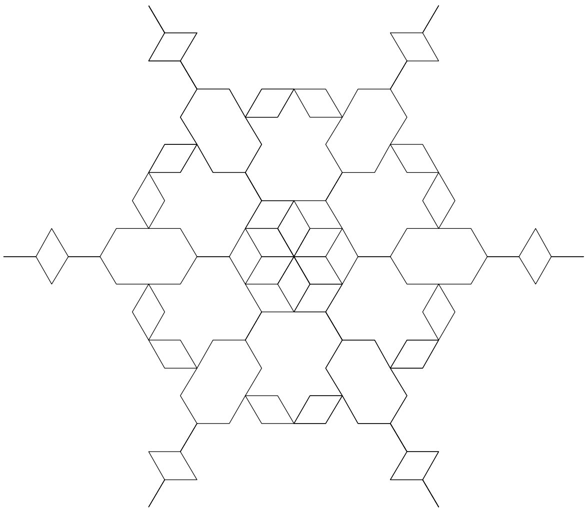


fig. 21, IV

Schema operazionale n. 10

ASSIOMA	REGOLA	CONDIZIONE
F+F--F+F	F→-F+F--F+F-	angolo = 30°

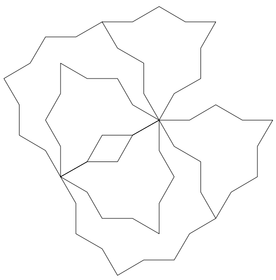


fig. 22, II

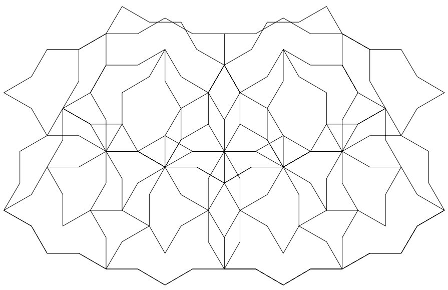


fig. 23, III

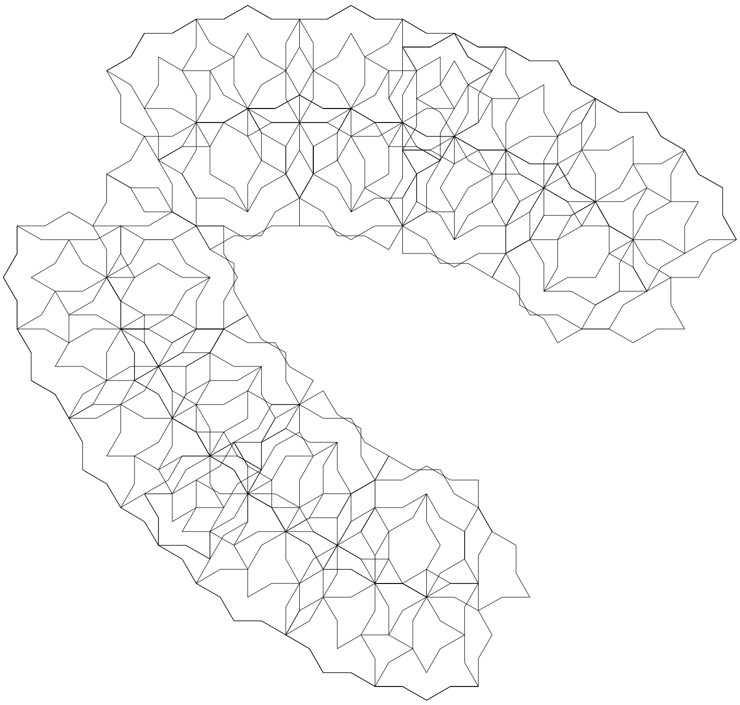


fig. 24, IV

Nello schema seguente compare, oltre a "!" già rammentata in precedenza, un'altra istruzione standard dei linguaggi L-systems, l'istruzione indicata l'istruzione indicata da «|» che realizza l'inversione della direzione di movimento della linea.

Schema operazionale n. 11

ASSIOMA	REGOLE	CONDIZIONE
FFF	F→!F+F--F+F|	angolo = 30°

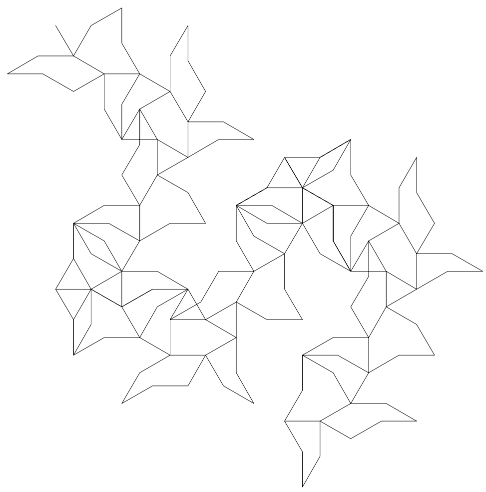


fig. 25, III

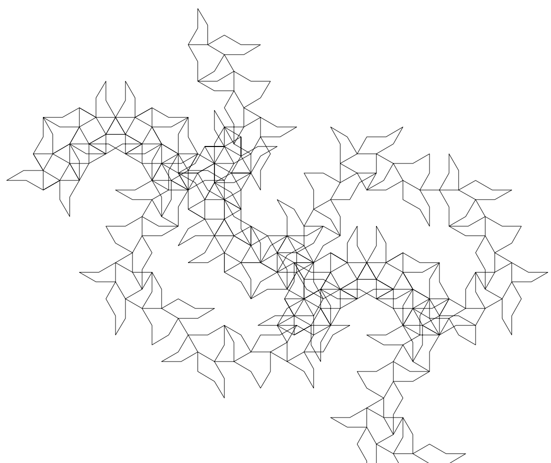


fig. 26, IV

Schema operazionale n. 12

ASSIOMA	Regola	CONDIZIONE
FA	F→F+F--F+F- A→ -F+F--F+F	angolo = 30°

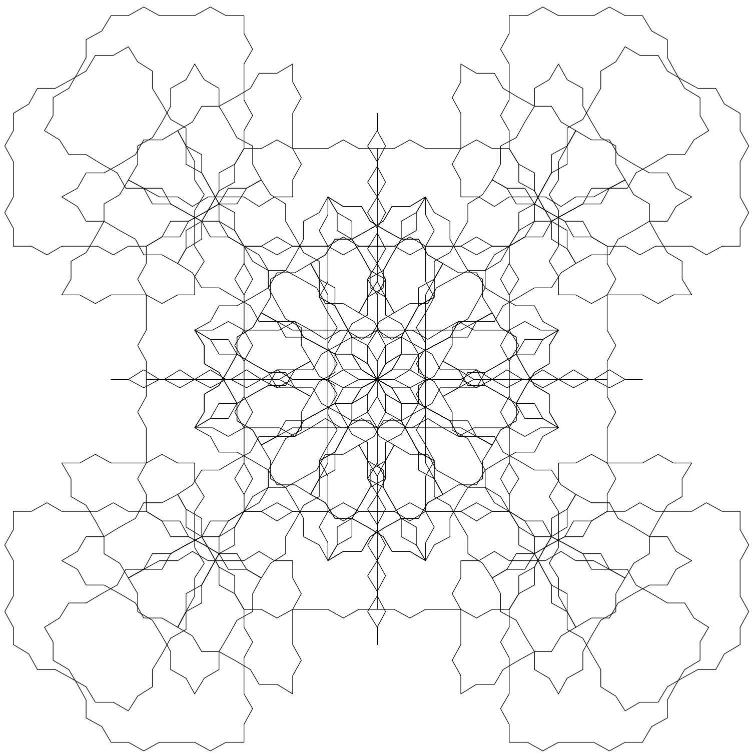
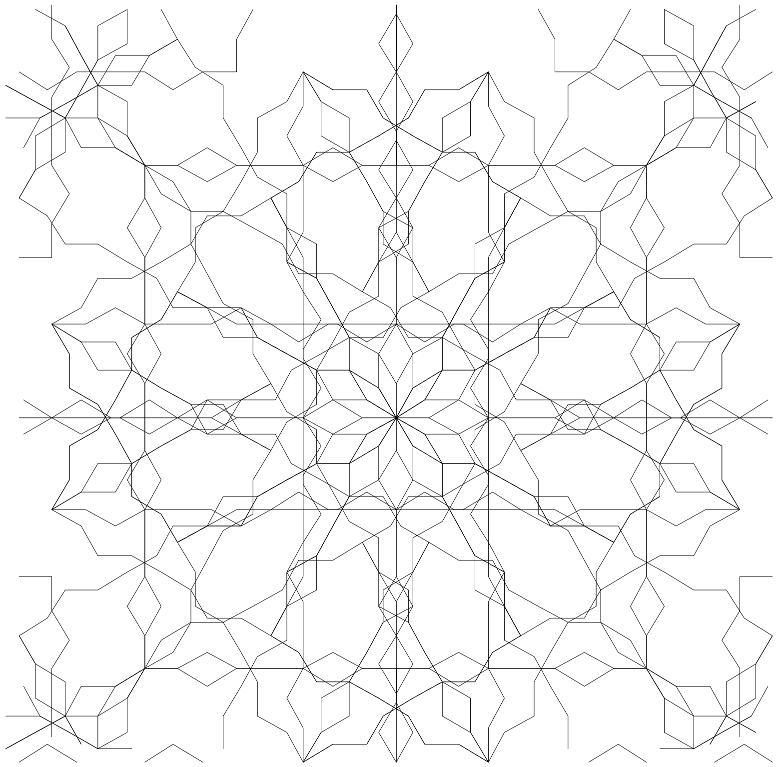


fig. 27, V

L'aspetto «decorativo» o «ornamentale» che compare spesso in queste figure risulta naturalmente dalle scelte effettuate nella struttura dell'algoritmo, ed in particolare è una conseguenza della scelta dell'angolo e dell'esistenza di particolari simmetrie all'interno dello schema operativo, che si vanno complicando ed intrecciando di iterazione in iterazione, arrivando a livelli di complessità strutturale che sarebbero davvero inimmaginabili senza l'aiuto di un automatismo capace non soltanto di generare la stringa, ma anche di fornire l'interpretazione grafica. Si consideri in particolare l’ultima «meraviglia» (fig. 27) che mi è accaduto di «scoprire» peregrinando tra i calcoli.

Da essa prendiamo il ritaglio della sua zona centrale, per mostrare la complessità che risulta dal meccanismo iterativo di un algoritmo tanto semplice.



In questo ritaglio si possono vedere – oltre lo schema elementare della regola dell’algoritmo di Koch, che è onnipresente nelle nostre variazioni – un intreccio di figure geometriche note, ad esempio due quadrati di cui l’uno sovrapposto all’altro secondo una certa inclinazione, un esagono, un ottagono, ed altro ancora: ad esempio, ognuno dei due quadrati può essere considerato suddiviso in nove quadrati. Numerosi piccoli parallelogrammi sono, per così dire, ovunque ordinatamente distribuiti – si tratta in realtà di due schemi elementari sovrapposti.

A proposito di una descrizione come questa, che presta attenzione agli aspetti figurali, così come si offrono direttamente alla percezione, occorre tuttavia riprendere alcune osservazioni che sono già state anticipate in precedenza e che riguardano il rapporto tra lo schema operazionale e il risultato figurale.

Si è già in effetti fatto notare che di norma lo schema operazionale non lascia certo facilmente intravvedere il risultato grafico. Al più può accadere in taluni casi interessanti di cogliere un nesso tra risultato grafico e schema operazionale. Prendiamo ad esempio un assioma di forma «XYYX»; vi è qui una articolazione secondo la quale questa stringa si lascia suddividere in due parti, delle quali l'una è l'inverso dell'altra.

Si consideri ora il seguente schema operazionale nel quale oltre la simmetria dell'assioma, si presentano ulteriori simmetrie nelle regole per X e per Y (lettere che peraltro qui compaiono come elementi «intralinguistici»):

Schema operazionale n. 13

ASSIOMA	REGOLA	CONDIZIONE
XYYX	X→F+X--F	angolo = 30°
	Y→F-Y+F	

Facendo agire questo schema operazionale otteniamo le seguenti figure:

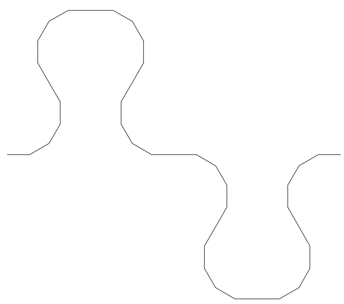


fig. 28, V

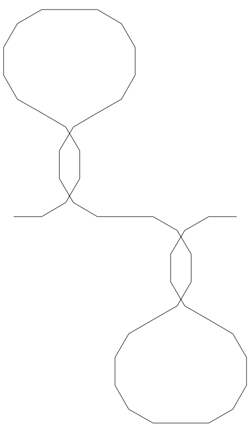


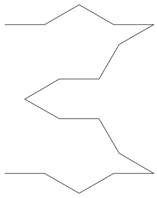
fig. 29, VI

Non c'è dubbio che tra la figura risultante e lo schema operazionale, nel suo gioco di inversioni e di simmetrie, presenti sia negli assiomi che nelle regole, sussista un nesso che può anche manifestarsi nel confronto tra la figura e lo schema. Ma anche in questi casi occorre mantenere una distinzione assolutamente necessaria tra il modo della costruzione e l'interpretazione percettiva del suo risultato.

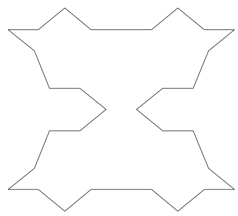
Se presentiamo ad esempio la prima figura a sinistra

tenderemo a considerarla come un rettangolo tagliato da un linea retta. Io penso che chiunque fosse richiesto di copiare questa figura traccerebbe anzitutto il rettangolo e poi la linea retta. Invece l'algoritmo ha prodotto questo risultato in modo interamente diverso che diventa visibile non appena spostiamo l'angolo di qualche grado, ad esempio da 90 a 87. La figura tracciata sulla destra, mostra il modo effettivo della sua costruzione. Il nostro traccialinee automatico non alza mai la sua punta dal foglio.

Analogamente nella figura seguente si stenterà a vedere lo stesso modulo figurale ripetuto quattro volte:



L'attenzione sarà invece attratta soprattutto dalle due punte sulla destra, oltre che dalla simmetria che si viene a creare sull'asse orizzontale; inoltre la figura mantiene un singolare carattere di incompletezza, dovuta forse proprio al fatto che la simmetria sull'asse orizzontale non è accompagnata da una simmetria sull'asse verticale. Come accade invece nel caso seguente:



Il risultato figurale è dunque, nel suo modo di apparire, del tutto autonomo rispetto allo schema operativo che lo genera. Una conseguenza di ciò è che, nonostante il fatto che queste costruzioni siano governate dal determinismo più rigoroso a meno non inseriamo noi stessi elementi di casualità nelle regole (cosa che è perfettamente possibile), la presenza della ripetizione può rimanere nascosta. Le figurazioni generate ci possono apparire fortemente irregolari, senza un piano e persino caotiche. È interessante notare che le figurazioni considerate nella loro successione non sempre e non necessariamente appaiono concatenate tra loro: ciascuna di esse occupa una posizione ben determinata all'interno di una serie, in quanto esse sono subordinate ad un unico schema formale, e sono dunque «specie dello stesso genere»: e tuttavia questa subordinazione ad un unico schema formale è tavolta compatibile con la massima differenza fenomenologica tra un risultato e il risultato ad esso immediatamente successivo. Inoltre, una piccola modificazione dell'algoritmo o di una sua condizione, talvolta genera una piccola distorsione nella figura, talora una modificazione «catastrofica».

§ 11

Il passaggio infinitario illustrato sull'esempio della curva di Koch – Il preteso carattere contro-intuitivo della lunghezza della curva di Koch.

Numerose delle figurazioni ottenute nelle nostre variazioni sulla curva di Koch sono chiuse, nel senso che riguadagnano il punto di partenza ricalcando poi il percorso precedente, cosicché il procedere oltre nelle iterazioni è privo di interesse per quanto riguarda il risultato grafico. L'iterabilità infinita è garantita all'interno dell'algoritmo, ma è, per così dire, priva di conseguenze. Il motore ad un certo punto gira vuoto e conviene fermarlo. Diversamente stanno le cose per l'originaria curva di Koch: facendo riferimento ad essa si può realizzare un'efficace esemplificazione del passaggio dall'iterazione infinita del processo ad un oggetto posto come infinito.

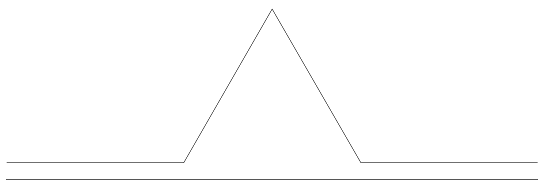
In rapporto alla curva di Koch si fa notare che essa può essere considerata come una linea che è, ad un tempo, *limitata* e di lunghezza *infinita*.

Si potrebbe commentare: quale nuovo scacco per l'intuizione che sicuramente si rifiuterà di accettare una cosa simile! Come potremmo, noi uomini di «buon senso» ammettere che, essendo due punti ad una distanza determinata, questa distanza non possa poi essere percorsa? Solo il pensiero logico, la razionalità pura ci può convincere ad assumere una simile asserzione contro-intuitiva.

A me sembra invece che non vi è forse migliore esempio per mostrare quanto un commento come questo sia superficiale e inconsistente. Eviteremo intanto di chiamare in causa il buon senso, che in genere non passa il suo tempo a meditare sulle curve di Koch ed altre cose similari; e così anche esempi *ad hoc* che fanno torto alla logica ed al buon senso e che peraltro non hanno nulla a che vedere con ciò di cui si discute – qui non si discute per nulla se si possa fare o meno una passeggiata su una curva di Koch.

Sarà opportuno anche avvertire che talvolta con le parole ci si compiace di fare un vero e proprio «gioco delle tre carte» – cambiando il contesto di senso sotto gli occhi del giocatore sprovveduto. Al contrario in questo genere di discussioni dobbiamo *tener fermo* anzitutto *il senso delle parole*; e per tenerlo fermo dobbiamo agganciarlo a qualcosa. Nel nostro caso non possiamo che agganciarlo all'algoritmo ed alla struttura grafica da esso generata.

Allora comprendiamo intanto che cosa significhi qui il fatto che la linea venga detta *limitata*. Se *a* e *b* sono gli estremi del tratto iniziale, questi estremi non cambiano di posizione nel corso delle iterazioni. Ma la regola realizza per ogni tratto rappresentato da F, una sostituzione con quattro tratti. Nella sostituzione avviene naturalmente la riduzione corrispondente della lunghezza del tratto, ovvero una variazione di scala. Ad ogni iterazione, il tratto rappresentato da F viene ridotto di 1/3; nello stesso tempo i tratti scalarmente ridotti che vengono sostituiti ad ogni F nell'iterazione successiva sono quattro, e non tre. Ciò è mostrato semplicemente dalla figura:

a  *b*

Stando così le cose ad ogni iterazione ogni tratto verrà sostituito con una lunghezza che è maggiore della precedente di 1/3. Questo è appunto evidente. Ed è allora evidente che ad ogni iterazione la linea diventerà sempre più lunga, anche se per incrementi progressivamente minori. Disponendoci dal punto di vista dell'infinito attuale, in cui non vi è un processo ma una totalità idealmente data, la lunghezza sarà appunto infinita. Ciò può essere compiutamente compreso e lo può proprio per il fatto che la leva fondamentale della comprensione è fornita dal dato evidente che si mostra nella figura precedente – qui non vi sono affatto argomentazioni o deduzioni a partire da premesse, dimostrazioni per assurdo o che altro. Si tratta proprio della vecchia e malfamata Einsicht, e mi azzarderò a dire: proprio nel senso in cui ne parlava Schopenhauer quando impiegava questo termine rendendolo sinonimo di cognitio, in contrapposizione alla convictio, cioè ad una procedura argomentativa che mi obbliga all'assenso anche senza un'effettiva comprensione interna dello stato di cose[50]. Sostengo dunque non solo che il parlare di segmento limitato di lunghezza infinita non ha nulla di contro-

[50] Questa distinzione è già proposta Schopenhauer nella *Quadruplice radice del principio di ragione sufficiente*, cit., p. 120 e poi ripresa nel *Mondo come volontà e rappresentazione*.

intuitivo, ma che una cosa simile è realmente comprensibile solo per mezzo ed a partire da considerazioni «intuitive» – dove tuttavia il termine di intuizione viene impiegato (in realtà piuttosto malvolentieri per via degli equivoci che pesano su di esso) in stretta connessione con l'idea secondo la quale esiste anche una logica delle figure, e non solo una logica della proposizione.

Naturalmente questo dato evidente iniziale si situa in una linea che va ampiamente oltre il piano delle cose concretamente viste e percepite, ed avviene poi il balzo infinitario che ci pone su un terreno di pure idealità. Ma questo balzo ha il suo trampolino nell'iterazione che, mentre comincia in un preciso luogo, termina poi in un totale altrove.

§ 12
La «crisi dell'intuizione» secondo Hans Hahn – Discussione critica.

Le nostre ultime considerazioni ci consentono di ricollegarci direttamente ad un famoso saggio del 1933 di Hans Hahn, matematico insigne che fu fra i promotori del Circolo di Vienna. Si tratta di un articolo che in realtà ha fatto testo, nonostante i molti anni trascorsi e le molte novità sul terreno del dibattito epistemologico. Esso contiene idee divenute moneta corrente proprio intorno al problema che rappresenta uno dei nodi della nostra discussione complessiva, e può essere considerato, rispetto ad essa, un piccolo classico.

Esso si intitola *La crisi dell'intuizione*[51] ed il suo scopo è quello di mostrare, sulla base di alcuni esempi tratti dall'ambito geometrico che la geometria, in tutte le sue possibili varietà, è una pura costruzione logica con la quale la cosiddetta intuizione ha ben poco da spartire, ed anzi rappresenta un freno ed un impedimento del pensiero. Non staremo qui a discutere gli scarsi cenni dedicati a Kant con cui si apre il saggio, per andare diret-

[51] Si tratta di una conferenza poi pubblicata, insieme ad altre appartenenti allo stesso ciclo, in *Krise und Neufbau in den exakten Wisseschaften. Fünf Wiener Vorträge*, Leipzig-Wien 1933. Qui si fa riferimento a H. Hahn, *The Crisis of Intuition*, in *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, New York 1956, vol. III, pp. 1956-1976.

tamente a due degli esempi fondamentali riportati da Hahn per sostenere la propria tesi in modo da dare a questa discussione la forma di uno sviluppo e di un consolidamento di quanto abbiamo or ora sostenuto.

Il primo di essi riguarda la possibilità di funzioni continue, e tuttavia non derivabili in *tutti* i loro punti. È interessante intanto notare che questo stesso esempio ricorre in Poincaré, *Il valore della scienza*[52] , e quindi in un autore che fa un suo discorso molto articolato sull'intuizione, e piuttosto propenso, come si sa, a valorizzarla. Di fatto tuttavia su questo esempio l'accordo tra Poincaré e Hahn è completo. Infatti esso viene proposto da Poincaré nel momento in cui egli vuole mostrare i limiti dell'intuizione e la necessità che i risultati ottenuti per via intuitiva vengano corretti ed eventualmente migliorati e resi sicuri dalla logica. In realtà anche l'opposizione stabilita da Poincaré tra logica e intuizione ci lascia del tutto insoddisfatti, ma naturalmente converrà limitarci qui alla questione particolare. Ecco quanto scrive Poincaré:

«L'intuizione non può darci né il rigore né la certezza: ce ne siamo accorti sempre di più. Citiamo alcuni esempi. Sappiamo che esistono funzioni continue prive di derivate. *Niente di più contrario per l'intuizione di questa proposizione che ci viene imposta dalla logica*. I nostri padri non avrebbero fatto a meno di dire: 'E evidente che ogni funzione continua ha una derivata, poiché ogni curva ha una tangente'. – Come può l'intuizione ingannarci a questo punto?».

Poincaré dà a questa domanda una risposta nettamente psicologizzante: ci raffigureremmo mentalmente una curva, come una linea senza spessore «ed allora è chiaro che potremo sempre rappresentarci questi due nastri sottili, l'uno rettilineo, l'altro curvilineo, in una posizione tale che si sfiorino leggermente senza attraversarsi. Saremo così condotti, a meno che un'analisi rigorosa non ci avverta, a concludere che una curva ha sempre una tangente»[53].

Vediamo ora come si articola la discussione di Hahn su

[52] Tr. it. a cura di G. Polizzi, La Nuova Italia, Firenze 1994, pp. 14 sgg.
[53] *Ibid.* , p. 15.

questo punto. Anzitutto vi è il richiamo ai fondamenti del calcolo differenziale – e quindi al problema del movimento di un punto in un determinato istante ed a quello leibniziano della tangente.

È chiaro, dice Hahn, che *per l'intuizione* un punto in movimento deve avere una velocità determinata in un determinato istante. E parallelamente deve essere *intuitivamente evidente* che una *curva* deve avere un'inclinazione determinata per ogni suo punto o almeno per la maggior parte di essi.

Ora intanto è il caso di chiedersi, come prima domanda per così dire preparatoria: che cosa mai significa «intuizione» in queste formulazioni? È assai difficile dare una risposta.

Evocando il calcolo differenziale ci si appella ad un altissimo livello di elaborazione teorica: in particolare l'idea del movimento del punto *in un determinato istante* è un'idea astratta che non fa parte affatto del *concetto comune* (quotidiano) di movimento (se si vuole intendere con intuizione qualcosa di simile ad un concetto comune). Forse il pensiero «quotidiano» può arrivare a concepire senza troppa difficoltà e con qualche spiegazione l'idea di velocità media. Il passaggio al limite invece richiede difficili spiegazioni, e deve essere teorizzato a fondo. Perché mai all'interno di questa complessa elaborazione teorica sarebbe proprio l'intuizione – questa pretesa facoltà intorno alla quale si sa ben poco – a suggerire erroneamente che ogni punto in movimento debba avere una velocità determinata in un determinato punto? Sembra assai più sensato sostenere che una simile posizione sia una conseguenza di un *orientamento intellettuale complessivo e di una concezione dell'analisi nella quale determinati modelli abbiano un carattere normativo e dominante.* Forse ciò che crea qualche problema non è l'intuizione (ammesso un qualche impiego sensato del termine), ma il tipo di matematica utilizzata e in particolare, l'esemplarità attribuita a certe forme funzionali piuttosto che ad altre.

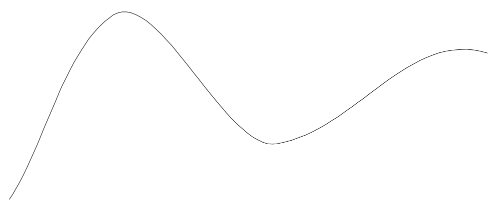
Attiriamo intanto l'attenzione su questa differenza: nella misura in cui si considera l'invenzione del calcolo infinitesimale come motivato, ad esempio, dal problema del movimento si riconosce già che l'*intuizione ha una sua parte*, in quanto si pensa alla dimensione reale del movimento, *e non ad una questione puramente matematica.*

Quando si pone il problema di una curva continua senza derivate si ha di mira invece una questione puramente matematica – e quindi qualcosa che non può essere posto sullo stesso piano delle considerazioni relative al movimento. Come nessuno penserebbe di fare una passeggiata su una curva di Koch, così nessuno progetterebbe di costruire un autodromo che abbia come percorso la curva di Weierstrass. È tempo di dire a chiare lettere che l'intuizione – intesa come senso comune, o qualcosa di simile – non ha nessuna opinione sulla curva senza derivate: non sa nemmeno che cosa sia una derivata, anzi, a dire il vero, ha qualche difficoltà a capire che cosa si intenda con «curva» nella matematica in genere.

Se in rapporto a questo tipo di problemi qualcosa viene trovato evidente o non evidente, ciò è appunto una questione che riguarda i «nostri padri» – come dice Poincaré: ed è assai ben detto. Infatti *se le curve senza derivate dànno dei problemi, non li dànno all'intuizione, ma ai matematici*; e ciò che viene messo in questione non è affatto la loro *personale* intuizione (come dire, la loro capacità immaginativa o cose di questo genere), ma proprio la matematica che hanno praticato fino a quel momento nella quale determinati modelli erano prevalenti.

Mettere in questione il movimento è poi sbagliato anche per un'altra ragione: una volta che si è mostrato che esistono curve continue senza derivate, *non si è dimostrato nulla intorno al movimento*. Non vi è affatto un rapporto semplice tra l'una e l'altra cosa.

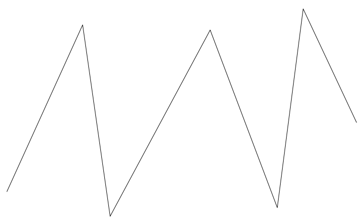
Analogamente per quanto riguarda il riferimento geometrico. In quanto si assume come modello di curva qualcosa di simile a questo:



naturalmente saremo portati a ritenere in linea generale che caratteristica eminente di una curva sia la possibilità di tangenti in ogni suo punto – ma non per il fatto che l'intuizione ci inganna e ci seduce, ma per il fatto che abbiamo scelto come modello proprio questo, e non un'altro. Abbiamo deciso cioè che la nostra geometria, ed in particolare nel momento in cui essa si è incontrata con il concetto di funzione, si sarebbe occupata prevalentemente di curve di questo tipo. Naturalmente non si trattò per nulla di una decisione arbitraria, ma dipendente dai problemi che avevano determinato quell'incontro.

Se poi con intuizione intendiamo il riferimento a modelli percettivi, è chiaro che essa *non contiene raccomandazioni particolari per il matematico* – non raccomanda un modello piuttosto che un'altro.

Dal punto di vista percettivo assumono rilievo due tipi con *andamenti caratteristici* nettamente differenti: un tipo come il precedente, che anche nel linguaggio corrente si chiama «curva», e un tipo come il seguente



che invece il linguaggio corrente non chiamerebbe affatto «curva». Per la percezione siamo qui alla presenza di configurazioni tipicamente differenti, e persino contrapposte, e di cui viene valorizzata proprio la contrapposizione; mentre il pensiero astratto tenderà a riunirle possibilmente sotto un unico titolo.

Ora, è il pensiero astratto che fa della prima un modello per la seconda piuttosto che l'inverso. L'intuizione come tale in questa faccenda non c'entra per nulla.

E riguarda ancora soltanto il pensiero astratto il fatto che il secondo tipo di curva non sia dominabile mediante gli strumenti analitici correnti.

Fatte queste premesse, vogliamo vedere più da vicino almeno i due primi esempi recati da Hahn, che ci interessano direttamente per ragioni che appariranno subito chiare.

Il primo di questi esempi è la curva priva di tangenti *in ogni suo punto* escogitata da Weierstrass nel 1861. «Si era soliti pensare – commenta Hahn[54] – che *l'intuizione ci obbligherebbe a riconoscere* che una simile deficienza [la mancanza di tangenti] potrebbe verificarsi solo in punti isolati ed eccezionali di una curva e non in tutti i suoi punti. Si credeva che una curva dovesse possedere una inclinazione esatta, ovvero una tangente, se non in ogni punto, almeno nella netta maggioranza di essi».

La circostanza curiosa è che Hahn inizia la propria esposizione osservando che di *una simile curva senza tangenti si può dare una dimostrazione con un'illustrazione intuitiva relativamente semplice*[55]. Si tratta di un'osservazione del tutto giusta. Egli ne dà infatti una descrizione evitando l'«intricato e arduo calcolo» con il quale Weierstrass perviene ad essa. In realtà si può fare di più e di meglio: è possibile evitare di ripetere la descrizione di Hahn, riprendendone tuttavia alcuni aspetti essenziali, e presentare invece, dopo averci pensato un poco sopra, la sua definizione operazionale, ovvero lo *schema* attraverso cui la curva può essere generata.

Infatti la curva di Weierstrass è una «spezzata» generabile all'interno di un algoritmo ricorsivo non troppo dissimile dalla nostra curva di Koch. Dovremo tuttavia, per raggiungere lo scopo, adattare nuovamente il linguaggio L-system introducendo due segni A e B che saranno interpretati graficamente nello stesso modo di F: entrambi indicheranno dunque un tratto, con la sola differenza che A indicherà un tratto *ascendente* e B un tratto *discendente*, secondo un angolo prefissato che rimarrà costante[56].

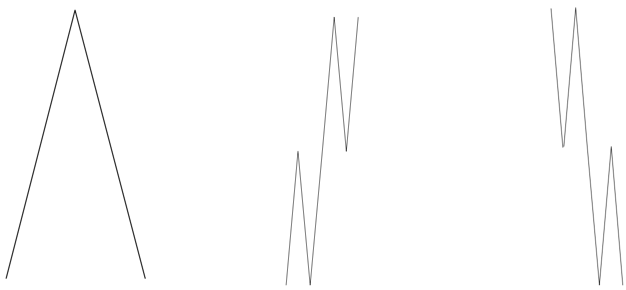
In effetti l'assioma sarà semplicemente rappresentato da

[54] H. Hahn, *op. cit.*, p. 1959.

[55] *ibid*., p. 1962.

[56] Come abbiamo già osservato, i linguaggi L-systems sono caratterizzati da una completa flessibilità per quanto riguarda le regole di cui sono di volta in volta costituiti. Si dovrà soltanto inserire all'interno del programma l'istruzione opportuna per i nuovi segni. Le regole per A e B sono naturalmente una nostra proposta *ad hoc*.

un tratto ascendente e da un tratto discendente, mentre le due figure corrispondenti alle regole di sostituzione per A e per B e destinata ognuna a sostituire un tratto ascendente ed un tratto discendente, saranno l’una il «rovescio» dell’altra.



assioma regole

La formula della curva di Weiestrass risulta allora essere la seguente, assumendo come condizione un angolo a 85°.

Schema operazionale n. 13

ASSIOMA	REGOLA	CONDIZIONE
AB	A→ABAABA B→BABBAB	angolo = 85°

Sulla base di questo schema avremo alla prima ed alla seconda iterazione le figure seguenti:

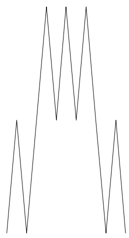


fig. 30, I

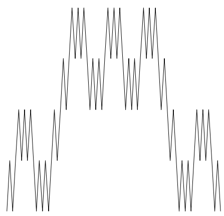


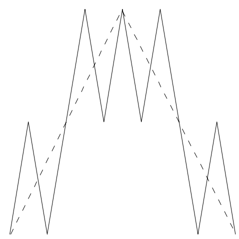
fig. 31, II

A questo punto non possiamo far altro che ripetere un commento che abbiamo già fatto in precedenza. Dallo schema operazionale, dal calcolo e dai primi risultati figurali corrispondenti si comprende con evidenza che nel corso delle iterazioni gli «spigoli» si andranno sempre più infittendo. Sulla base del passaggio infinitario, reso possibile dal pensiero dell'ecceterabilità del processo, sarà poi possibile parlare di un simile curva come di una curva priva di tangenti in tutti i suoi punti.

Dove è allora la crisi dell'intuizione? È chiaro che il passaggio infinitario pone questo «oggetto» su un piano interamente astratto, facendo di esso un oggetto puramente intellettuale: considerato in quanto tale, esso non ha nulla di intuitivo, ma questa è una scoperta degna soltanto di Monsieur de Lapalisse. Se qui vi è qualche problema, e certamente vi è, si dovrà trattare di un *problema interno al pensiero matematico*, ai suoi metodi ed agli strumenti intellettuali che esso mette in campo; le eventuali difficoltà non provengono da qualcosa che stia al di fuori della matematica e che le sia estraneo e persino ostile. Se i padri della matematica di una volta ritenevano impossibile un oggetto simile avevano le loro buone ragioni – questo oggetto «infinito» non è certo un oggetto qualunque (è anzi un oggetto un po' *strano* – come si lascia sfuggire Hahn). E le ragioni più importanti di questo loro atteggiamento non erano affatto, io credo, di ordine meramente «psicologico», come sempre viene suggerito in contesti come questi.

Hahn conclude invece in questo modo: «Il carattere di questa curva elude interamente l'intuizione; in verità dopo poche ripetizioni del processo di segmentazione, la figura che si evolve è cresciuta in modo così intricato che l'intuizione la può a malapena seguire; ed essa ci abbandona completamente... Il fatto è che solo il pensiero o l'analisi logica può seguire questo *strano* oggetto fino alla sua forma finale» [corsivo mio][57]. Si rivela qui come sia importante l'aver potuto riportare, da parte nostra, la figura ad un calcolo e come assuma rilievo, di fronte ad una simile osservazione il richiamare l'attenzione sulla trasparenza della struttura che si presenta nella formula costruttiva. Questa prospettiva di discorso manca interamente in Hahn benché egli mostri di rendersi conto perfettamente della logica interna della figura nel momento in cui egli traccia il disegno seguente:

[57] *ibid*., p. 1964.



Tuttavia siamo noi a parlare di una logica della figura. Di essa Hahn non ha il benché minimo sospetto, e così, dopo aver prodotto questo disegno tanto istruttivo, passa oltre. L'intuizione, egli dice, operando tra l'altro un pesante spostamento di senso nella parola rispetto agli impieghi che egli stesso ha fatto in precedenza, non riesce a seguire gli intricati percorsi dell'iterazione. Ma sarebbe giusto chiedersi: *perché dovrebbe farlo*? Si tratta del resto di un problema che, mi sembra, non esiste nemmeno per l'«analisi logica». L'ultima frase secondo cui solo «l'analisi logica può seguire questo strano oggetto sino alla sua forma finale» non può voler dire che la logica riesce a fare ciò in cui l'intuizione fallisce, ma soltanto che, una volta approdati all'infinito attuale, l'oggetto è da parte da parte un «oggetto del pensiero» – un oggetto interamente entrato nell'ideazione matematica. Siamo così tornati a Monsieur de Lapalisse.

Dopo tutto ciò potremo trattare più speditamente del secondo esempio che ci fornisce il destro, non solo per ribadire il nostro orientamento, ma anche di aggiungere alcune considerazioni che ci consentiranno di tirare un poco le fila.

Si tratta di una delle curve «che riempiono lo spazio» proposte da Peano nel 1890. La stessa curva venne discussa da Hilbert nel 1891.

Come nei casi precedenti, la curva è realizzabile attraverso un algoritmo ricorsivo dello stesso tipo di quelli precedentemente proposti.

Si tenga conto che nei linguaggi L-systems i segni privi di regola vengono semplicemente trascurati, e può accadere che una regola per un segno possa essere applicata solo in iterazioni successive alla prima. Ad esempio nel seguente schema nella prima applicazione la regola per il segno B non viene applicata.

Schema operazionale n. 14

ASSIOMA	REGOLE	CONDIZIONE
A	A→-BF+AFA+FB- B→+AF-BFB-FA-	angolo = 90°

La sequenza di figure realizzate nelle prime quattro iterazioni è la seguente:

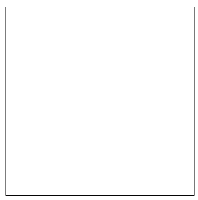


fig. 32, II

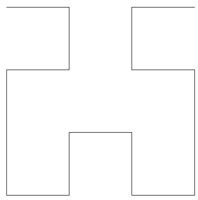


fig. 33, III

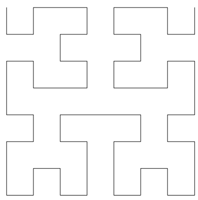


fig. 34, III

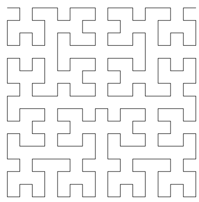


fig. 35, IV

Nel considerare le figure che presentano ciò che accade nel succedersi delle iterazioni operate sulla stringa potremo certamente essere autorizzati a commentare che ciò che vediamo è che la linea tende a riempire interamente lo spazio, vediamo in certo modo la linea diventare una superficie. L'infittirsi del reticolo fa sì che lo spazio bianco tra le linee diventi sempre più piccolo ed alla fine sarà pienamente occupato. Di fronte agli occhi avremo così un quadrato nero.

Forse si dirà: qui viene considerata la linea percepita e concretamente disegnata, la quale ha, in particolare, uno spessore; ma questa non è matematica! Non è geometria!

Infatti non lo è. Il piano empirico concreto deve essere interamente superato e la curva di Peano-Hilbert deve essere considerata come un oggetto geometrico ideale. Vogliamo allora essere più precisi: oltre a vedere, nel senso usuale del termine, che la linea tende a diventare una superficie, comprendiamo con evidenza che essa tende a diventare una superficie in un senso che non ha nulla a che vedere con la sottigliezza o con lo spessore: si tratta invece di una circostanza che può essere colta ed afferrata nello schema costruttivo, graficamente interpretato, che ne mostra l'«essenza logica», purché naturalmente venga effettuato il passaggio all'infinito attuale che assolve qui un ruolo essenziale.

Il punto del problema sta ora in questo: come è possibile citare una simile curva come esempio di figura «contro-intuitiva», di scacco dell'intuizione, quando l'idealizzazione infinitaria operata dal pensiero può contare, per quanto riguarda la comprensione, su un sostegno intuitivo così cospicuo qual è la *struttura visibile* della figura? La giustificazione di Hahn consiste nel fatto che sarebbe contrario all'*intuizione* l'idea che un punto in movimento possa descrivere qualcosa di diverso da una «curva» – ovvero che una curva possa «riempire una superficie». Ma se questa è l'opinione dell'intuizione, si tratta certamente di una intuizione che ha già ragionato molto e che ha compiuto molti passi nella direzione dell'oggetto geometrico astratto. Altrimenti essa sarebbe ferma all'idea che non c'è niente di più facile da capire che una linea possa riempire una superficie. Qualora poi sia acquisita la differenza tra il concreto oggetto percettivo e l'oggetto ideato dal pensiero matematico, l'intuizione avrà ben poco a che ridire rispetto ad un oggetto che per principio si sottrae interamente alla sua giurisdizione e che cade invece in quella del pensiero puro. È *in rapporto alle legalità interne a questo campo* che talora queste curve sono apparse come dei «mostri», nel duplice senso dell'etimo: delle autentiche «meraviglie» e dei casi «contro-natura». Non per un caso qualsiasi o per una resistenza di forze irrazionali.

Al termine dell'articolo di Hahn, rispunta, spiace dirlo, la saccente superficialità dell'empirismo più rozzo. Quel che ci appare mostruoso e inusuale, finirà con il rientrare nella norma purché sia assecondato dall'educazione e dall'abitudine. Si tratta dunque solo di maggiore o minore familiarità – e Hahn arriva a rendere la parola «intuizione» a tal punto vacua da rendere possibile l'affermazione secondo cui «il concetto di 'differenza di potenziale' è intuitivo per l'elettricista, ma non per la maggior parte degli uomini»[58].

Da questa frase, che oscilla tra la banalità e la completa insensatezza, si spicca poi il volo all'idea che con un po' di educazione e un sistema scolastico moderno tutte le meraviglie e i mostri non esisterebbero affatto, le geometrie non euclidee, gli spazi multidimensionali, e tutto il resto sarebbero «intuitive» quanto lo è la geometria euclidea. Ed anche le curve di Koch, di Peano, ecc., sarebbero considerate come curve qualunque.

Invece si tratta di curve *strane*! E strane rimarranno *per sempre*.

ANNOTAZIONE

Il testo a nostro avviso più importante sul tema della «crisi dell'intuizione» (che assume il carattere di una vasta e penetrante discussione sul concetto di intuizione nell'ambito della riflessione filosofica sulla matematica) è quello scritto da K. Th. Volkert, *Die Krise der Anschauung*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1986. In questo libro si dedica una ampia sezione all'«età aurea dei mostri» (pp. 99-157). Della conferenza di Hahn si parla nella parte seconda, storico-sistematica, alle pp. 251-260.

§ 13

Per concludere: alcune osservazioni sulla «geometria della natura» e sugli oggetti «fratti» – Il richiamo alla differenze soggettive del punto di vista – Il nostro scopo è stato quello di mostrare quanto sia movimentato il rapporto tra l'esperienza e le elaborazioni intellettuali.

Ma in che cosa poi consiste la stranezza di una curva come quella di Peano-Hilbert? Quella curva è strana perché, mentre dovremmo attribuire ad essa una sola dimensione – come per ogni linea – forse spetterebbe ad essa l'attribuzione anche della

[58] *ibid.*, p. 1976.

seconda dimensione. O almeno potremmo rimanere incerti fra l'una e l'altra attribuzione. (Una curva così ci potrebbe costringere a riflettere sulla nozione di dimensione).

In certo senso, e in modo inatteso, siamo qui indotti a rammentarci dei nostri precedenti discorsi su Euclide, sulla linea che è «lunghezza senza larghezza». Come se in quella frase si fosse toccato un problema che è ancora in grado di tormentarci.

Le nostre considerazioni sembrano comunque aver proposto una sistemazione della questione che potrebbe essere giudicata abbastanza soddisfacente. Da un lato vi è un calcolo infinitamente iterabile in via di principio; questo calcolo trova il suo strumento concreto in un «traccialinee» con il quale si mostra l'andamento della figura ai diversi livelli dell'applicazione ricorsiva delle regole. Lo spazio entro il quale la curva viene delineata si va riempiendo sempre più, ad ogni successiva iterazione, finché ci troviamo di fronte ad un indiscutibile quadrato nero.

Ma naturalmente sappiamo che ciò accade perché qui la linea ha in effetti una larghezza! Distinguiamo allora chiaramente l'oggetto empirico concreto da un lato e l'oggetto ideale dall'altro. E comprendiamo benissimo che dobbiamo considerare quel riempimento visibile come una sorta di simulazione empirica di un riempimento ideale: come è ideale la curva pensata come interamente tracciata, oppure la stringa infinita di cui quella curva non è altro che una decodificazione grafica.

Eppure proprio nel momento in cui è tempo di chiudere questo nostro saggio sentiamo l'esigenza, non solo di ribadire questo chiarimento, ma di evitare anche che esso, a sua volta, venga inteso in modo troppo rigido. Ciò a cui siamo realmente interessati, da un punto di vista generale, è che sia mantenuta la consapevolezza di quanto sia movimentato il rapporto tra l'esperienza e le elaborazioni intellettuali.

Questo rapporto può essere considerato da più di una angolatura, e se possiamo ritenerci appagati da un modo di impostarlo e di renderci ragione di esso, variando l'angolatura, potrebbero proporsi nuovi problemi capaci di rimettere in gioco il precedente modo di approccio ad esso.

Intanto vi è una circostanza sulla quale occorre richiamare l'attenzione con particolare vivacità: nel momento in cui il pensiero geometrico sta per ricevere una svolta ed un nuovo impulso, quella netta distinzione tra l'oggetto di pensiero *da un lato* e l'oggetto dell'esperienza *dall'altro*, viene non tanto messa in questione, quanto *temporaneamente sospesa*, e ciò accade quasi come un vero e proprio *esercizio intellettuale tendente a sondare la possibilità di scoprire, sul piano esperienziale, stimoli ed agganci per nuovi percorsi, nuove inclinazioni possibili dai quali uno stesso problema può essere riconsiderato*.

Poiché nei nostri ultimi sviluppi era presente, sia pure assai obliquamente, la «geometria frattale» ed abbiamo ritenuto in precedenza di poter citare come significativa una frase di Mandelbrot, possiamo forse avviarci a tirare le fila ricollegandoci a quello che potrebbe essere immaginato come inizio ideale della sua impresa.

Questo inizio ci sorprende per la sua ovvietà, e ta tanto più ci sorprende il fatto che questa ovvietà sia rimasta per secoli in certo modo fuori campo, quasi a documentare la forza dei paradigmi entro i quali la conoscenza – per una necessità interna di delimitazione tematica e metodica – restringe e determina l'ambito delle cose da ritenersi «rilevanti», emarginando aspetti del reale che si sottraggono ad essi.

Guardiamoci intorno: dove nella natura *nella natura* troviamo qualcosa come un cilindro un cono o un cubo? Ovvero: quadrati, rettangoli, triangoli, cerchi… queste forme di cui è stata realizzata nei secoli una grande scienza. Possiamo dirci veramente convinti che un albero assomigli ad una piramide?

Dove sono i rami o qualcosa di simile ad un ramo? E che cosa resterebbe della forma vagamente piramidale di un pino o di un abete togliendo di mezzo la *struttura della ramificazione*?

Improvvisamente *apriamo gli occhi*, come li apre la folla di fronte alla nudità del re nella fiaba di Andersen.

Mandelbrot fa qui la parte del fanciullo di quella fiaba e nello stesso tempo ci riconduce ancora una volta sul *terreno delle forme concretamente esperite* orientando il nostro sguardo in una direzione nuova. In certo senso ci si appella inizialmente ad una descrizione più fedele di ciò che ci sta intorno, ma avendo già di mira, naturalmente, il problema di un'estensione della capacità di dominio teorico. Mandelbrot ammonisce a non dimenticare che nello stesso nome della geometria è presente il richiamo alla terra: si tratta di un richiamo che ha numerose implicazioni, ma che intanto attira l'attenzione sul «paesaggio» terrestre, in cui ci sono alberi e foreste, corsi dei fiumi, isole e continenti, montagne, nuvole e pianure. La domanda è allora: in che modo vi può essere una geometria di forme come queste, del *crinale di una montagna*, delle coste *di un'isola*, della forma di un *albero* o di un *cespuglio*? La risposta a questa domanda non può essere cercata in direzione delle forme euclidee.

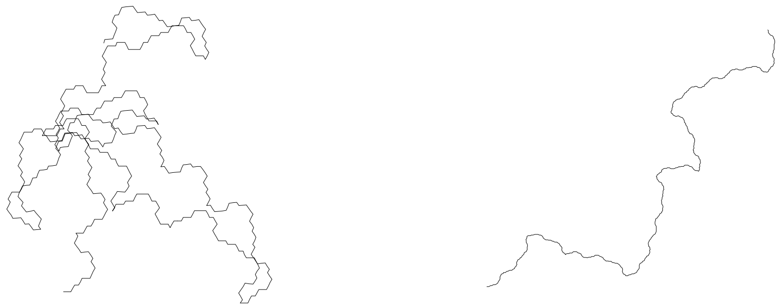
Stando unicamente alla nostra esposizione non risulta certo subito chiaro in che senso possa essere interessante proporre il problema delle forme naturali a partire dalle figure ottenute per iterazione ricorsiva. Ciò dipende soprattutto dagli esempi che abbiamo scelto. Essi proponevano per lo più strutture con una forte regolarità interna, per quanto complessa e articolata, talvolta con una certa propensione per la «vetrata» o la «pavimentazione». Abbiamo già avvertito in precedenza che questo risultato dipende dalle peculiarità dei calcoli e non è difficile immaginare, anche a partire dagli esempi precedenti, delle variazioni degli schemi che sono in grado di generare strutture figurali di tipo interamente diverso.

Tra questa enorme varietà di possibilità, vi è anche quella che vengano generate figure che presentano caratteristiche che in qualche modo fanno pensare a forme che troviamo nella natura, e si potrà trattare di forme relativamente regolari, come la forma di un albero, le venatura di una foglia, la forma di una conchiglia; oppure di forme che verrebbero caratterizzate come irregolari, come l'estuario di un fiume, la costa di un'isola o di un continente o il crinale di una montagna.

Schema operazionale n. 15

ASSIOMA	REGOLE	CONDIZIONE
F	F→-FF+F-!-F+F+F-	angolo = 62°

La prima figura che segue è stata ottenuta da questo schema; la seconda dallo stesso schema con angolo a 32°, entrambe alla quarta iterazione.



Solo con un’attenta osservazione si riscontreranno qui delle ricorrenze, e l’apparenza di casualità potrà essere accentuata nel proseguimento delle iterazioni. Si riveda a questo proposito la curva di Koch e le sue successive iterazioni: ad ogni iterazione la curva diventa sempre più frastagliata, sempre più fratta. Nella stessa scelta di questo termine – oggetto frattale, geometria frattale – piuttosto che sull’iterazione l’accento viene fatto cadere sulla «spezzatura». I «mostri» non cominciano con le curve strane e straordinarie di Weierstrass, di Koch, di Peano o di Hilbert: in realtà è un «mostro» in potenza già la più semplice delle «spezzate». Nello stesso tempo avviene una modificazione prospettica assai singolare: i mostri sono tanto poco tali da essere indicati come possibili modelli di forme naturali.

Ripensiamo all’esempio famoso proposto da Mandelbrot della misurazione della costa della Gran Bretagna. Sono almeno due gli aspetti che meritano qui di essere messi in rilievo: anzitutto si ritorna a riflettere su un problema di misurazione, e precisamente su un problema, almeno in prima apparenza, del tutto empirico. In secondo luogo si avanza in certo senso la pretesa di ritrovare su questa terra quell’infinito attuale che appartiene invece al paradiso delle ideazioni matematiche.

Si verifica infatti per una costa qualcosa di simile a ciò che si verifica per la curva di Koch. Pensiamo ad un golfo visto dall’alto e molto di lontano. Esso ci apparirà con quell’andamento caratteristicamente semicircolare che ci fa appunto parlare di esso come di un golfo. Ma non appena il nostro sguardo si avvicina ad esso, la linea semicircolare ci apparirà sempre più frastagliata. Di fronte a noi vi sarà eventualmente solo una porzione del golfo intero, ma questa porzione sarà a sua volta fatta di golfi più piccoli ciascuno dei quali, ad un sguardo più ravvicinato, apparirà fatto di golfi, ecc.

Ora ci chiediamo: fino a che punto procederemo in questo mutamento di scala? Non potremmo continuare fino ad insenature i cui estremi distano di pochi metri, e ancora oltre, di pochi centimetri, e ancora oltre? Che ne sarebbe allora della lunghezza della costa e della sua possibile misurazione? Nel proporre questo esempio Mandelbrot osserva che la lunghezza della costa è «praticamente infinita». In realtà, se se si pone il problema della misurazione di una costa, ciò avverrà per determinati scopi e sono questi scopi a determinare il punto di tollerabilità della rettificazione, il punto cioè nel quale termina l'interesse di ogni ulteriore variazione di scala. Il problema della lunghezza infinita sorge solo se si ha nella testa la curva di Koch – o qualche altra dello stesso tipo. La costa della Gran Bretagna diventa allora un puro pretesto in rapporto alla discussione di una questione tutta teorica.

Nello stesso tempo è anche vero che si potrebbe sostenere che una curva frattale di un certo tipo può essere considerata un *modello* per una costa in genere: qualcosa di capriccioso come una costa, che noi possiamo al più descrivere o rappresentare nel senso di una immagine-copia può, a quanto sembra, essere invece artificialmente costruito, può essere *simulato* come se fosse prodotto, anziché da sommovimenti tellurici, dal gioco del mare contro le rocce, da un algoritmo iterativo. O più precisamente: la forma di una costa è determinata da diversi fattori di ordine fisico, da una catena più o meno complessa di eventi causali: la sua forma può essere *descritta* nel modo in cui essa si presenta e indagata nella rete degli *eventi causali* che la hanno generata. Ma di fatto disponiamo di un calcolo che è in grado di costruire una configurazione tipologicamente analoga e non ce la sentiamo di sostenere che ciò non significhi proprio nulla, che questa circostanza sia del tutto disomogenea alle precedenti e che di essa non possiamo farcene proprio nulla.

Al contrario si può sostenere che proprio questa simulazione, questa artificializzazione, questa ricerca di modelli fa parte degli scopi essenziali del conoscere. Ed alle obiezioni secondo le quali avremmo, da un lato, a che fare con strutture rigorosamente deterministiche e dall'altro con processi in cui la «casualità» assolve comunque una funzione significativa si può rispondere segnalando la possibilità di prendere ulteriori provvedimenti, ad esempio quello di rendere più duttili i calcoli oppure di realizzare delle attenuazioni o degli indebolimenti di concetti di base.

Il calcolo, una volta istituito fa esattamente quello che deve fare; ma siamo noi a istituire i calcoli. Nella struttura dei calcoli possono essere *previste* regole particolarmente complesse e modi complessi di impiegare le regole, oppure addirittura modificazioni *casuali* delle condizioni[59]; all'autosimilarità in senso stretto e rigoroso, come è esemplificata dalla curva di Koch, è possibile sostituire una nozione più elastica di quasi-autosimilarità, di autosimilarità statistica.

Vi è un singolare cammino che conduce dalla ripetizione – che è certamente una delle sorgenti di strutture ordinate – all'elemento caotico, dalla regola all'assenza più o meno apparente di regole. Si comprende anche che la questione qui sfiorata tende a superare una problematica puramente morfologica. La terra di cui si parla è anche la terra in quanto sede di fenomeni naturali di ogni genere, di fenomeni metereologici, di trasformazioni biologiche, fisiche e chimiche, ed è naturalmente la terra in quanto pianeta che partecipa ad una vicenda cosmica. Fin dall'inizio la geometria «frattale» avanza la pretesa di essere una «geometria della natura» – una dizione che prospetta un pensiero geometrico già tutto rivolto, fin dai suoi primi passi, al problema di possibili applicazioni.

In realtà si potrebbe forse sostenere che questo riferimento alle applicazioni si presenti anche troppo a ridosso dell'elaborazione teorica, e che questa sia di conseguenza dominata, più che dalla preoccupazione della perfezione formale dei concetti, dalla loro utilizzabilità.

Dobbiamo ammettere che anche dal nostro punto di vista, che si limita scientemente alla problematica morfologica, questo accento posto sulle forme *naturali* suscita qualche perplessità,

[59] Cfr. B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali*, cit., p. 46.

nonostante l'interesse intrinseco dell'argomento. Tuttavia va preso atto del fatto che una sorta di speciale ritorno all'empirico, al naturale, al reale, o comunque più ampiamente ad una tematica non solo geometrica, ma fisica in un senso ampio del termine, è stato uno dei motori della nuova geometria «frattale». Questo richiamo assume a tratti anche l'andamento di una riflessione sulla stessa struttura della percezione e sulle modalità dinamiche delle costituzioni percettive dell'oggetto.

Si presti nuovamente attenzione al modo in cui è stato posto il problema della costa e quindi anche al modo in cui è stato riproposta l'idea della lunghezza infinita. La concretizzazione di questa massima astrazione ripropone le differenze *soggettive* del punto di vista – *più da vicino, più di lontano* – che fanno parte dell'*esperienza della realtà*, ed è appena il caso di rilevare come questa circostanza sia significativa nel contesto dei problemi intorno ai quali si sono sviluppate prevalentemente le nostre discussioni. Il concetto puro non esita ad *imbastardirsi* riprendendo il contatto con l'esperienza, ricevendo di qui nuovi stimoli e nuove direzioni di sviluppo.

Indicativo dello stesso problema è il modo in cui viene introdotta la nozione di dimensione frattale[60]. La considerazione che sta alla base di questa nozione è puramente matematica: è interessante tuttavia notare che nel momento in cui essa viene qui fatta valere ci si richiama alle relatività fenomenologiche della cosa materiale, agli «adombramenti prospettici» di cui parlano i fenomenologi.

La dimensione è forse qualcosa che appartiene all'oggetto come tale come un suo attributo specifico e caratterizzante? Consideriamo allora un gomitolo di lana Quale dimensione dobbiamo attribuirgli? Dovremmo dire che esso è un oggetto sferico tridimensionale? In effetti esso ci apparirà così solo se lo guardiamo ad una certa distanza. Invece, guardato a breve distanza e con una lente di ingrandimento non vedrò affatto il gomitolo di lana, ma vedrò il filo, ed eventualmente vedrò i fili di cui è composto il filo di lana: fili sottilissimi che mi sembreranno senza spessore. Perché mai di un filo così sottile dovrei dire che

[60] *ibid*., p. 8.

esso ha tre dimensioni? Eppure con una lente abbastanza potente questi fili sottilissimi mi potranno apparire come colonne. A cominciare da questa relativizzazione della nozione di dimensione e facendo notare la varietà delle situazioni che si possono presentare già a livello percettivo, l'idea di una possibile dimensione intermedia, ad esempio tra l'1 e il 2, può ricongiungersi con un'elaborazione matematica già predisposta e che può avere un'origine e una giustificazione interamente diversa.

Il purismo matematico potrà anche alzare le spalle di fronte ad una mossa che sembra dovuta puramente agli interessi della divulgazione. Da parte nostra, diremo invece che gli interessi della divulgazione siano i benvenuti se suggeriscono una riflessione di ampio respiro che riguarda le tensioni tra concetti ed intuizioni, tra formazioni del pensiero puro e formazioni esperienziali. Queste tensioni talora si attenuano e si stabilizzano, talora ridiventano effervescenti, e lo ridiventano in particolare nei grandi momenti innovativi, quando si intravvedono vie nuove e nuove possibilità di elaborazione teorica. Allora invece di chiare distinzioni potremo avere la sensazione di precipitare nell'ambiguità: da un lato, l'esempio del gomitolo di lana è rozzamente empirico, dall'altro esso si situa in una direzione che promuove nuove vie del pensiero e nuovi modi di approccio teorico. Certamente possiamo sempre adagiarci in contrapposizioni elementari – in esse conviene persino cercare un sostegno quando è necessario riordinare le idee: ma con l'attenzione in ogni caso sempre rivolta ad apprezzare gli impulsi che provengono dal concreto dell'esperienza e la grandezza e l'audacia della speculazione logico-concettuale.